University of Fribourg / Faculty of Science and Medicine / Department of Mathematics

Geometry of large random graphs

Propriétés géométriques à grande échelle de graphes aléatoires

David Corlin-Marchand

In this thesis, we study the geometry of two random graph models.

In the first chapter, we deal with affine preferential attachment trees. They are trees which recursively grow as follows. Starting with a finite tree—called the seed tree, vertices are attached one by one, each linked by an edge to a random vertex of the current tree, chosen with a probability proportional to an affine function of its degree. We prove the asymptotic influence of the seed on the law of an affine preferential attachment trees. To be more precise, we show that if T_n^S and $T_n^{S'}$ are two random trees on n vertices, both built according to the rule described above but stemming from distinct seed trees S and S', then their laws remain at uniformly positive total variation distance as n increases.

In the second chapter, we turn our attention to another random graph model, namely supercritical causal triangulations, and look at them through the prism of oriented percolation. Causal triangulations are planar graphs obtained roughly speaking by adding horizontal connections between vertices of an infinite tree. Here we consider the case where they are derived from a supercritical Galton—Watson tree conditioned to survive with a geometric offspring distribution. When such maps are subject to a Bernoulli oriented percolation process, we prove that a continuous phase transition occurs at a non trivial critical point p_c and we compute an explicit expression of the latter as an infinite series. We establish that strictly above the threshold, infinitely many infinite clusters coexist in the map. This is a typical percolation result for graphs with a hyperbolic flavour. Finally, we demonstrate that large critical oriented percolation clusters converge after rescaling towards the Brownian continuum random tree.

Dans cette thèse, nous étudions la géométrie à grande échelle de deux modèles de graphes aléatoires.

Dans un premier chapitre, nous nous intéressons aux arbres à attachement préférentiel affine, qui sont des arbres dont le volume croît avec le temps, selon un mécanisme récursif, aléatoire et constant. Partant d'un certain état initial — un arbre fini appelé graine — on ajoute un à un de nouveaux sommets, en reliant chacun d'entre eux par une arête à un sommet présent dans l'arbre courant. Le choix de ce dernier est aléatoire et la probabilité de choisir un sommet en particulier est proportionnelle à une fonction affine et croissante de son degré. Ce que nous montrons dans cette thèse est l'influence asymptotiquement persistante de la graine sur la loi d'un arbre à attachement préférentiel affine. Plus exactement, si T_n^S et $T_n^{S'}$ sont deux arbres aléatoires à n sommets, construits d'après la règle décrite ci-dessus à partir de deux graines S et S' distinctes, alors la distance en variation totale entre leur loi respective est uniformément minorée en n par une constante strictement positive. Autrement dit, la loi d'un arbre à attachement préférentiel affine dépend de la graine dont il est issu, y compris en temps long.

Dans un second chapitre, indépendant du premier, nous étudions cette fois la géométrie de triangulations causales surcritiques, au travers d'un processus de percolation orientée. Les triangulations causales sont des cartes planaires construites, pour faire court, en ajoutant des arêtes « horizontales » entre les sommets d'un arbre situés à même distance du sommet racine. Nous nous intéressons ici plus particulièrement aux triangulations causales obtenues à partir d'un arbre de Bienaymé-Galton-Watson surcritique, conditionné à survivre, de loi de reproduction géométrique. Nous soumettons ces cartes à une percolation orientée de Bernoulli et montrons qu'une transition de phase continue se produit en un point critique p_c, non trivial, dont l'expression, sous forme de série infinie, est calculée explicitement. Au dessus de ce seuil, une infinité de clusters infinis coexistent dans la carte, ce qui confirme le caractère fondamentalement hyperbolique de sa géométrie. Enfin, nous prouvons qu'au point de percolation critique, un cluster dont le nombre de sommets est conditionné à être grand, correctement renormalisé, converge pour la distance de Gromov-Hausdorff vers l'arbre continu brownien.

Jury :
Prof. Dr. Thomas Duquesne (president of the jury and referee)
Prof. Dr. Ioan Manolescu (thesis supervisor)
Prof. Dr. Nicolas Curien (thesis co-supervisor)
Dr. Miklós Z. Rácz (referee)