

# L'irrationalité et la transcendance de $e$ et de $\pi$

Sylvain Rudaz

Master thesis in Mathematics

Depuis plus de 250 ans, nous savons que  $e$  et  $\pi$  sont irrationnels. Question : Les nombres  $\pi$  et  $\pi+e$  sont-ils également irrationnels ? Bien qu'on puisse effectivement dire quelque chose sur ces deux nombres à l'aide d'un argument simple, on n'a toujours pas trouvé de réponse à la question précédente. De nombreux autres problèmes sont également encore ouverts dans la théorie des nombres, branche des mathématiques constituant un domaine de recherche toujours actif.

Le premier chapitre introductif présente un survol des résultats d'irrationalité et de transcendance de ces trois derniers siècles. Nous y décrivons en particulier la période entre 1737 et 1882 durant laquelle d'illustres mathématiciens tels que Euler, Lambert, Hermite et Lindemann ont dû rivaliser d'ingéniosité pour finalement réussir à démontrer la transcendance de  $\pi$ .

Les deux chapitres suivants constituent la partie centrale du document. Nous y donnons des preuves exhaustives de l'irrationalité de  $e$  et de  $\pi$  (chapitre 2) ainsi que de la transcendance de ces deux nombres (chapitre 3).

Dans le quatrième chapitre, nous décrivons dans les grandes lignes quelques idées de preuves historiques d'irrationalité et de transcendance, notamment dans le contexte des fractions continues.

Dans un chapitre en annexe, nous nous concentrons sur l'Histoire du nombre d'Euler, de ses balbutiements jusqu'à son heure de gloire avec le rôle central que joue la fonction exponentielle en analyse.

Superviseur : PD. Dr. Francine Meylan