

Décroissement exponentiel de la taille des boucles du modèle $O(n)$ sur un graphe hexagonal \mathbb{H} pour un paramètre n large

Matilde Tissières

Master thesis in Mathematics

Le modèle à boucles $O(n)$ est issu du célèbre modèle à spins d'Ising, introduit par Lenz en 1920. Ce modèle de physique statistique, nommé Lenz-Ising, permet d'expliquer les états d'ordre et de désordre, dans des matériaux ferromagnétiques, à une température inverse critique. En particulier, en dimension un, l'analyse d'Ising permet de révéler aucune transition de phase du modèle à spins $O(1)$ sur les graphes planaires carrés et hexagonaux. Pouvons-nous prétendre que le modèle à boucles $O(n)$, sur le graphe hexagonal \mathbb{H} , tolère une transition de phase pour un paramètre n large? Le modèle à boucles $O(n)$ se caractérise par des chemins aléatoires fermés qui ne s'intersectent jamais, appelés communément des boucles. En fixant le graphe hexagonal \mathbb{H} et le paramètre n large, une question se pose : comment les boucles du modèle $O(n)$ s'organisent-elles et se profilent-elles sous un tel régime?

Nous présentons, d'abord, que le modèle à spins et à boucles $O(n)$ suivent chacun une décroissance exponentielle de corrélation, sur le graphe hexagonal \mathbb{H} , lorsque n est large. En d'autres termes, nous vérifions que pour le modèle à boucles $O(n)$, la probabilité qu'il existe une boucle traversant deux sommets décroît exponentiellement vite, plus la distance graphique entre ces sommets croît, uniformément en x le poids des arêtes. Ensuite, nous étudions, en détail, la structure d'une configuration dans un tel régime. Avec des conditions de bord adaptées, deux phases se distinguent selon la valeur de nx^6 . En effet, si nx^6 est suffisamment petit, les boucles sont éparées et rares. Le modèle est dans une phase diluée et désordonnée. Si, au contraire, nx^6 est suffisamment grand, les boucles sont serrées et nombreuses. Le modèle se situe dans une phase dense et ordonnée. Finalement, nous démontrons que le modèle, lorsque nx^6 est suffisamment grand, s'assimile à une petite perturbation d'un des trois états de bases qualifiés selon un pavage de boucles triviales de \mathbb{H} .

Superviseur : Professeur Ioan Manolescu