



UNIVERSITÉ DE FRIBOURG
UNIVERSITÄT FREIBURG

UNIVERSITÉ DE FRIBOURG, SUISSE

SERVICE DE DIDACTIQUE UNIVERSITAIRE ET COMPÉTENCES NUMÉRIQUES

RÉNOVATION DU SCÉNARIO PÉDAGOGIQUE DU COURS «ASPECTS THÉORIQUES DE PHYSIQUE FONDAMENTALE» PAR ACTIVATION PÉDAGOGIQUE ET L'IMPLÉMENTATION DE LA CLASSE INVERSÉE.

Travail de fin d'étude en vue de l'obtention du Diplôme en Enseignement Supérieur
et Technologie de l'Éducation

Sous la direction de Roland PILLONEL

Augustin MUSTER

Département de Physique, Université de Fribourg

2025

Je déclare sur mon honneur que mon travail de fin d'étude est une œuvre personnelle, composée sans concours extérieur non autorisé.

Augustin MUSTER

Table des matières

Introduction	4
1. Considérations théoriques	5
a. Enseignement actif.....	5
Définition.....	5
Les 4 leviers d’activation de la pédagogie active.....	5
b. La classe inversée.....	7
Exemples de définitions.....	7
Avantages et Challenges lors de l’implémentation de la classe inversée.....	8
La classe inversée dans les cours d’introduction à la physique.....	10
c. Taxonomie des objectifs d’apprentissage.....	11
2. Description du projet pédagogique	14
a. Description du cours.....	14
b. Retour des expériences provenant des années précédentes.....	15
c. Proposition de révision du scénario pédagogique du cours.....	15
3. Mise en place	17
a. Bloc de cours type.....	17
b. Concept d’évaluation.....	19
c. Résultat de l’évaluation.....	19
4. Discussion	22
a. Retour d’expérience.....	22
b. Avantages observés.....	24
c. Challenges observés.....	27
d. Réflexion quant aux ressources personnelles engagées.....	29
e. Réflexion quant aux résultats à l’examen.....	30
f. Pistes d’amélioration pour une éventuelle reconduite.....	31
Conclusion	33
Bibliographie	34
Annexes	36
A. Calendrier du cours.....	36
B. Répartition des éléments du cours en catégories.....	37
C. Questionnaire pour les cours de théorie.....	39
D. Questionnaire pour les sessions interactives.....	41
E. Quizzes des sessions interactives.....	44
F. Séries d’exercices.....	52
G. Scripts des trois premiers chapitres.....	61

Introduction

Dans le cadre de l'évolution constante des méthodes pédagogiques, l'enseignement supérieur se doit d'adopter des approches innovantes pour améliorer l'apprentissage des étudiant·e·s. Ce travail de fin d'études se concentre sur la rénovation du scénario pédagogique du cours « Aspects Théoriques de Physique Fondamentale » par diverses méthodes dont l'implémentation de la classe inversée.

La rénovation du scénario pédagogique est motivée par plusieurs observations faites lors des années précédentes. En effet, le niveau d'activation pédagogique était très faible, les étudiant·e·s participaient peu et ne faisaient pas les exercices intégrés au cours. De plus, les étudiant·e·s arrivaient avec des parcours de formation très différents, ce qui rendait difficile l'implémentation d'une différenciation efficace.

Pour répondre à ces défis, nous proposons de diviser la matière du cours en quatre niveaux de complexité, allant des bases aux éléments avancés voir hors du champ d'application. Chaque séquence d'enseignement comprendra une partie à faire à la maison (qui portera sur les éléments de base), suivie d'une partie de théorie en classe. Cette approche permettra de gagner du temps et de proposer des sessions d'exercices interactives, favorisant ainsi un apprentissage plus actif.

La structure de ce travail est la suivante: Dans un premier temps, une description des concepts théoriques importants comme l'enseignement actif, la classe inversée ou la taxonomie des objectifs d'apprentissage d'Anderson et Krathwohl sera proposée. Ensuite, une description détaillée du projet pédagogique mis en place, ainsi qu'une analyse des résultats obtenus suite à son implémentation sera donnée. Pour finir, le chapitre 4 consistera en une discussion réflexive sur l'expérience de l'auteur de ce travail, clôturant ainsi le projet et proposant d'éventuelles pistes d'amélioration en cas d'une potentielle reconduite.

1. Considérations théoriques

a. Enseignement actif

Le but de la rénovation pédagogique considérée dans ce projet étant de rendre l'enseignement et l'apprentissage actifs, il convient donc pour commencer de définir ce concept ainsi que les différents leviers pouvant être actionnés afin de rendre un enseignement plus actif.

Définition

Une des premières publications définissant la pédagogie active est celle de Bonwell et Eison (1991) dans laquelle il est écrit que «L'apprentissage actif est généralement défini par les chercheurs en éducation comme un apprentissage qui nécessite que les étudiant·e·s s'engagent de manière cognitive et significative avec le contenu.». Contrairement à une approche où ils se contentent d'écouter et de mémoriser, la pédagogie active les pousse à réfléchir, à poser des questions et à appliquer leurs connaissances. Elle favorise ainsi un apprentissage plus profond en les rendant pleinement acteurs de leur formation.

Les 4 leviers d'activation de la pédagogie active

Comme le résume très bien le cahier *Oser la pédagogie active Quatre clefs pour accompagner les étudiant·es dans leur activation pédagogique* (De Clercq et al., 2020), il existe quatre leviers d'action pour activer un enseignement. Il s'agit des suivants:

Le levier motivationnel: Le levier motivationnel concerne toutes les actions en lien avec l'implication des étudiant·e·s. Il est possible d'agir sur ce levier à l'aide de trois éléments principaux:

- Le sens de l'activité: L'étudiant·e sera d'autant plus engagé·e dans un apprentissage si il·elle y trouve de l'intérêt, qu'il·elle discerne l'utilité et l'importance qu'aura cet apprentissage dans son futur professionnel et que le coût de cet apprentissage en terme de ressources personnelles est modéré.
- Le sentiment de compétences: Un étudiant·e sera d'autant plus apte à s'impliquer dans un apprentissage si il·elle s'en sent capable et compétent.
- La perception d'autonomie: Dans l'activité d'enseignement, l'étudiant·e s'appliquera plus si son opinion et sa personne sont considérés en tant que tels par les enseignant·e·s et les camarades.

Le levier cognitif: L'activation cognitive correspond à la volonté d'un·e étudiant·e à mettre plus de profondeur dans sa compréhension, à aller plus loin, à être critique sur la matière enseignée ou à établir des liens avec des connaissances préalables ou d'autres matières. Un modèle permettant de mesurer l'activation cognitive lors d'un enseignement est le modèle ICAP (Chi et Wylie, 2014). Dans ce modèle, une séquence d'enseignement sera classée dans une des catégorie suivante:

- Interactif (I): L'étudiant·e a des interactions avec les enseignant·e·s et les autres étudiant·e·s. Des dialogues ou des débats ont lieu.
- Constructif (C): L'étudiant·e étend la matière apprise en développant de nouvelles idées.
- Actif (A): L'étudiant·e participe en prenant des notes ou lisant à voix haute.
- Passif (P): L'engagement de l'étudiant·e est minimal. Il·elle est attentif·ve à ce qui se passe durant le cours.

Le niveau d'activation cognitive sera donc plus élevé si les activités proposées rentrent dans la catégorie I et C que si elles sont plus passive, i.e. dans les catégories A et P.

Le levier social: Les interactions sociales sont très importantes dans l'activation pédagogique, car elles permettent de créer des conflits socio-cognitifs, i.e. des questionnements sur des certitudes apparues comme évidentes, des divergences d'opinions lors de débats ou de la diversité dans les niveaux et méthodes de compréhension.

Le levier contextuel: L'enseignement doit être correctement situé afin de développer tous les effets escomptés. Par exemple, il doit être adapté au seuil de compétence des étudiant·e·s, c'est-à-dire que les étudiant·e·s doivent pouvoir réaliser l'activité avec ce qu'ils maîtrisent déjà et un minimum d'aide. Pour appuyer sur le levier contextuel, il est également possible de créer un enseignement authentique qui est plus proche des réalités professionnelles, des préoccupations et des projets des étudiant·e·s.

D'un point de vue de la théorie de l'activation pédagogique décrite ci-dessus, les changements qui seront effectués dans ce projet permettraient de jouer sur les leviers suivants:

- Le levier motivationnel, notamment le sentiment de compétence et la perception d'autonomie. Cela grâce à la partie "classe inversée" du dispositif, c'est-à-dire la partie à la maison et la session d'exercice interactive.
- Le levier cognitif, car les sessions interactives permettent d'atteindre des niveaux cognitifs plus hauts dans le modèle ICAP.
- Le levier contextuel: Les exercices résolus en groupe permettent de rendre l'enseignement plus authentique, et de l'adapter au seuil de compétence des étudiant·e·s.
- Le levier social, les exercices interactifs en groupes permettant de créer des conflits socio-cognitifs.

b. La classe inversée

Le modèle de la classe inversée est le concept central dans l'implémentation du projet pédagogique décrit dans ce travail. Après avoir défini ce qu'est la classe inversée, cette section comporte la synthèse d'une revue de littérature sur ce sujet, permettant d'identifier quelles sont les attentes que peut avoir un·e enseignant·e vis-à-vis des bénéfices de

l'implémentation d'un tel modèle mais aussi quels sont les freins connus au moment de la mise en place d'un dispositif de ce genre. Finalement, un article tiré de la littérature présentera comment le modèle de la classe inversée a déjà été appliqué à la physique dans l'enseignement supérieur.

Exemples de définitions

Le modèle de la classe inversée a commencé à être implémenté et étudié au début des années 2000, engendrant de ce fait la publication d'un grand nombre d'articles et d'ouvrages à ce sujet. Cependant, la définition en reste pratiquement toujours la même. En prenant par exemple une des premières publications à ce sujet, Lage et al. (2000), «Inverser une classe signifie que les événements qui se passent traditionnellement à *l'intérieur* de la salle de classe se passent maintenant à *l'extérieur* de la classe et inversement.» (p. 32). Les auteur·ice·s de ce même article mentionnent également la place centrale des outils numériques et technologiques (parfois utilisés en parallèle, de manière redondante) tels que le World Wide Web ou PowerPoint avec bande son préenregistrée afin de «... fournir aux étudiant·e·s un ensemble d'options à utiliser dans leur apprentissage. L'enseignant·e se concentre donc sur l'objectif d'apprentissage (e.g. préparer les étudiant·e·s à une discussion) et permet à l'étudiant·e de choisir la meilleure méthode pour atteindre cet objectif.» (Lage et al., 2000, p. 30). Dans leur définition et description du modèle de classe inversée, les auteur·ice·s mettent ici en évidence l'avantage de la différenciation, élément central de ce projet pédagogique où l'objectif d'apprentissage choisi par l'enseignant·e sera de préparer les étudiant·e·s à résoudre des problèmes simples et développer la théorie en lien avec le chapitre considéré dans la séquence du scénario pédagogique en cours.

Plus tard, Bergmann et Sams (2012), de leur côté, ont appliqué la classe inversée à un cours de chimie (Bergmann et Sams, 2009), proposeront une définition similaire de même que Akçair et Akçair dans une revue de littérature datant de 2018 (Akçair et Akçair, 2018). Ces derniers précisent que «Dans le modèle de la classe inversée, l'enseignant·e aide les étudiant·e·s au lieu de simplement délivrer des informations, alors que les étudiant·e·s deviennent responsables de leur propre processus d'apprentissage et décident de leur propre rythme d'apprentissage (Lai et Hwang, 2016).». Ils définissent ici le rôle central des étudiant·e·s en autonomie et la posture de l'enseignant qui, elle, n'est plus centrale du tout. De par sa définition, ce modèle de classe peut apporter beaucoup aux étudiant·e·s et enseignant·e·s vis-à-vis d'un modèle plus classique, mais induit également de nombreuses difficultés qui seront discutées dans les sections suivantes.

Avantages et Challenges lors de l'implémentation de la classe inversée

Afin de permettre d'identifier les avantages (bénéfices) ainsi que les challenges (freins) liés à l'implémentation du modèle de la classe inversée dans l'enseignement supérieur, une synthèse de la revue de littérature citée précédemment (Akçair et Akçair, 2018) est proposée dans cette section. Pour ce faire, les auteur·ice·s ont analysé le contenu¹ de 71

¹ Par souci de concision, la méthode ainsi que les métriques utilisées ne seront pas décrites, mais sont disponibles dans (Akçair et Akçair, 2018).

articles publiées entre 2014 et 2016² dont 80% proviennent d'études effectuées dans le cadre de l'enseignement supérieur.

Dans chaque article considéré, des mots clés (codes) liés aux avantages et challenges ont été relevés puis compilés en les regroupant en catégories et sous catégories. Pour les avantages, le Tableau 1 présente les différentes catégories relevés alors que d'une manière similaire, le Tableau 2 relève les challenges identifiés. Durant l'implémentation de ce projet pédagogique, il sera donc possible d'identifier les avantages ou challenges rencontrés afin de les comparer avec les résultats de cette étude de littérature et les articles considérés et cités dans celle-ci.

Tableau 1 –Avantages de l'implémentation du modèle de la classe inversée. Reproduit à partir de (Akçair et Akçair, 2018, p. 339). Les scores obtenus suite à l'analyse des données ne sont pas présentés ici, mais disponibles dans l'article. Les avantages sont énumérés par ordre de fréquence d'apparition dans la littérature prise en considération dans l'étude.

Avantages de l'implémentation de la classe inversée
Résultats d'apprentissages
<ul style="list-style-type: none"> ● Améliore les performances d'apprentissage. ● Satisfaction. ● Engagement. ● Motivation. ● Augmente les connaissances. ● Améliore les compétences de pensée critique. ● Sentiment de confiance accru. ● Favorise la créativité. ● Se concentre sur les compétences de résolution de problèmes. ● Meilleure rétention. ● Améliore les compétences d'application. ● Améliorer les compétences TIC.
Contributions pédagogiques
<ul style="list-style-type: none"> ● Apprentissage flexible. ● Permet un apprentissage individualisé. ● Améliore le plaisir d'apprendre. ● Meilleure préparation avant le cours. ● Favorise l'autonomie. ● Offre des opportunités de collaboration. ● Permet plus de Feedback. ● Renforce l'auto-efficacité. ● Favorise l'apprentissage par des pairs. ● Augmente l'effort d'étude. ● Soutient l'intérêt pour le cours. ● Améliore l'assiduité. ● Convient à l'enseignement en grand groupe. ● Réduit les abandons.

² Il est à noter qu'en l'état de l'année de rédaction de (Akçair et Akçair, 2018), la majorité des études au sujet de la classe inversée avait été publiée entre 2014 et 2016. La revue de littérature comprend les articles ayant été publiés jusqu'au 31 décembre 2016.

Efficacité Temporelle
<ul style="list-style-type: none"> ● Temps de classe plus efficace. ● Plus de temps pour la pratique.
Dispositions
<ul style="list-style-type: none"> ● Feedback positif des étudiant·e·s. ● Perceptions positives (étudiant·e·s). ● Attitudes positives. ● Perceptions positives (enseignant·e·s).
Interactions
<ul style="list-style-type: none"> ● Interactions étudiant·e·s-enseignant·e·s. ● Interactions générales. ● Interactions étudiant·e·s-étudiant·e·s.
Autres
<ul style="list-style-type: none"> ● Moins d'anxiété. ● Rentabilité. ● Adaptation rapide des étudiant·e·s.

Tableau 2 –Challenges rencontrés lors de l’implémentation du modèle de la classe inversée. Reproduit à partir de (Akçair et Akçair, 2018, p. 340). Les scores obtenus suite à l’analyse des données ne sont pas présentés ici, mais disponibles dans l’article. Les challenges sont numérotés par ordre de fréquence d’apparition dans la littérature considérée dans l’étude.

Challenges rencontrés lors de l’implémentation de la classe inversée
Pédagogie
<ul style="list-style-type: none"> ● Le temps de préparation des étudiant·e·s est limité avant la leçon. ● Les étudiant·e·s ont besoin d’instructions à la maison. ● Il n’est pas possible d’obtenir de l’aide en dehors des leçons. ● Les enseignant·e·s ne peuvent pas savoir si les étudiant·e·s ont regardé les vidéos ou pas. ● Les effets de la classe inversée ne durent pas longtemps. ● Problèmes liés à l’implémentation.
Perspective de l’étudiant·e
<ul style="list-style-type: none"> ● Prends du temps. ● La charge de travail augmente. ● Les étudiant·e·s ne préfèrent pas cette méthode. ● Problème d’adoption de la méthode. ● Anxiété face à la méthode. ● Résistance au changement. ● Les étudiant·e·s trouvent que la méthode n’est pas juste/déraisonnable.
Perspective de l’enseignant·e·s
<ul style="list-style-type: none"> ● Prends du temps. ● Plus grande charge de travail. ● Difficulté de coordonner les tâches. ● Planifications des séquences d’activités.
Technique et Technologie
<ul style="list-style-type: none"> ● Qualité des vidéos. ● Inégalité par rapport à l’accès aux moyens technologiques. ● Besoin de compétences numériques (étudiant·e·s). ● Coût. ● Besoin de compétences numériques (enseignant·e·s). ● Besoin d’infrastructures spécifiques.
Autres
<ul style="list-style-type: none"> ● Biais parental. ● Manque de support institutionnel.

La classe inversée dans les cours d’introduction à la physique

Il est difficile de trouver des publications décrivant les effets de l’implémentation de la classe inversée dans un contexte similaire à celui du projet professionnel décrit dans ce travail, i.e. un cours d’introduction à la physique dans l’enseignement supérieur. Cependant, Bates et Galloway (2012), décrivent leur expérience dans un contexte similaire, à l’exception du

nombre d'étudiant·e·s significativement supérieur au nombre d'étudiant·e·s participant à ce projet.

En termes de résultats, les auteur·ice·s relèvent une très bonne expérience, par exemple «Par toutes les métriques utilisées pour l'évaluer, le cours cette année a été un succès. Cela a été confirmé par les résultats à l'examen final.» (p. 7). Cependant, ils·elles relèvent deux challenges principaux dans l'implémentation, s'agissant premièrement de la charge de travail liés à la préparation du contenu, mais aussi de la difficulté que représente le changement d'état d'esprit nécessaire à passer d'un cours préparé à la minute près (ce qui est souvent le cas en physique) à un cours moins structuré (pleine participation des étudiant·e·s). Il sera alors intéressant de mettre ces deux challenges en perspective avec les expériences vécues par ce projet.

c. Taxonomie des objectifs d'apprentissage

Comme mentionné dans l'introduction, ce projet professionnel comportera la séparation des éléments du cours, et donc des objectifs d'apprentissage, en différentes catégories. Pour ce faire, il est nécessaire d'introduire une taxonomie des objectifs. Dans cette section, une introduction à la taxonomie d'Anderson et Krathwohl (Anderson & Krathwohl, 2001, et Krathwohl, 2002), une version révisée de la taxonomie de Bloom (Bloom, 1956) sera donc donnée.

La taxonomie d'Anderson et Krathwohl classe les objectifs d'apprentissage selon deux dimensions complémentaires: la dimension des types de connaissances et celle des processus cognitifs. La première a pour vocation de décrire le contenu d'un objectif d'apprentissage, qui peut appartenir à l'un des 4 types de connaissance suivants (un exemple provenant du domaine de la physique est donné pour chacun d'eux):

- **Connaissance factuelle:** Faits, définitions et termes spécifiques à la discipline. *Par exemple:* La définition d'un vecteur, le nom d'un instrument de mesure ou la valeur d'une constante.
- **Connaissance conceptuelle:** Principe, relations ou structures qui permettent d'organiser l'information. *Par exemple:* La loi de Newton qui permet de mettre en relation la masse, l'accélération et la force ou alors le concept de l'énergie.
- **Connaissance procédurale:** Méthode ou technique pour résoudre un problème. *Par exemple:* une procédure pour appliquer la loi de Newton pour calculer l'accélération d'un objet sur un plan incliné, un protocole expérimental pour mesurer une constante ou alors une méthode de résolution des équations différentielles linéaires du premier ordre.
- **Connaissance métacognitives:** Connaissance sur sa manière d'apprendre, sur sa pensée. *Par exemple:* Choisir et justifier le choix entre deux méthodes pour résoudre un problème ou s'auto-évaluer à la fin d'un examen.

En ce qui concerne la deuxième dimension, la dimension des processus cognitifs, les objectifs peuvent être classés dans les catégories suivantes (sous forme de verbes d'action):

- **Mémoriser:** Rappeler des faits et des concepts de base. *Par exemple:* Réciter les lois de Newton ou rappeler les valeurs de constantes physiques connues.
- **Comprendre:** Expliquer des idées ou des concepts. *Par exemple:* Interpréter un graphique de la position en fonction du temps ou présenter le concept de la conservation de l'énergie.
- **Appliquer:** Utiliser des informations dans de nouvelles situations. *Par exemple:* Calculer la force exercée sur un objet en utilisant les lois de Newton ou utiliser la cinématique pour calculer la trajectoire d'une particule.
- **Analyser:** Décomposer l'information en parties et comprendre leur relation. *Par exemple :* Décomposer les forces agissant sur un objet en composants ou analyser les résultats d'une expérience et en comprendre l'erreur.
- **Évaluer:** Justifier une décision ou un point de vue. *Par exemple :* Comparer différentes méthodes de résolution de problèmes et choisir la plus efficace ou alors se prononcer sur la pertinence d'un modèle théorique en le comparant à des résultats expérimentaux.
- **Créer:** Produire un travail original ou innovant. *Par exemple :* Concevoir une expérience pour tester une hypothèse en physique. ou développer un nouveau modèle théorique.

La Figure 1 représente cette taxonomie sous la forme d'un double escalier où les deux dimensions sont présentes. Cette schématisation est plutôt commune dans le domaine des sciences de l'éducation et permet de distinguer la complexité d'un objectif, selon son niveau taxonomique "haut" ou "bas". Par exemple un objectif à très haut niveau taxonomique (connaissance métacognitive-créer) serait:

Concevoir un projet de recherche individuel sur un sujet avancé en physique, en planifiant les étapes de la recherche, en justifiant les choix méthodologiques, et en évaluant les résultats obtenus.

Alors qu'un objectif de niveau très bas (connaissance factuelle-Mémoriser) serait

Rappeler les unités de base du Système International (SI) pour la longueur, la masse, et le temps.

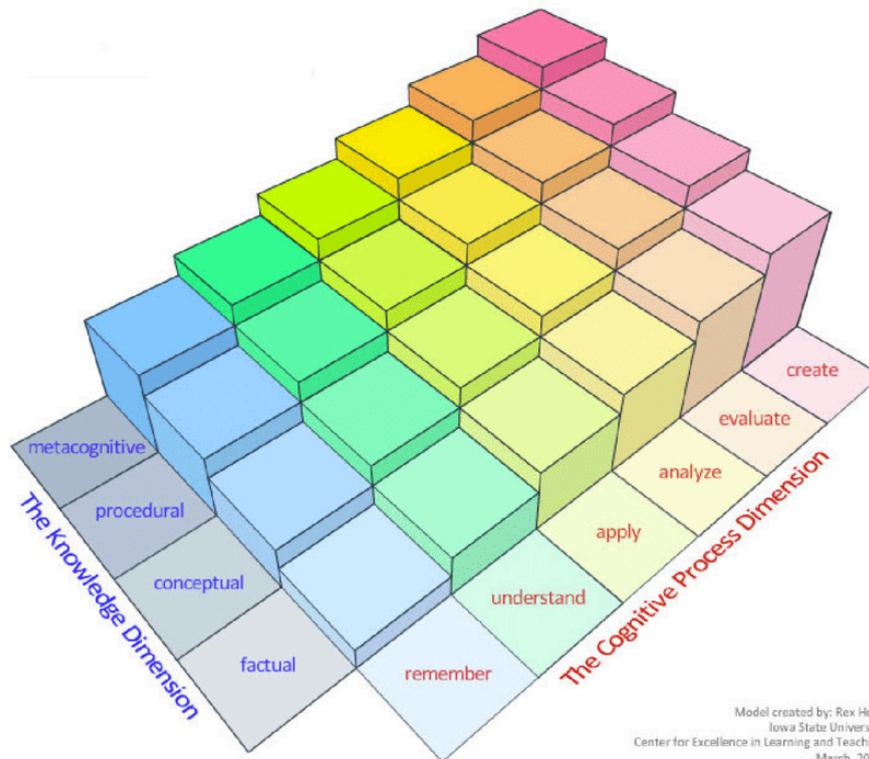


Figure 1 – Schématisation de la taxonomie d’Anderson et Krathwohl (en anglais). On y retrouve les deux dimensions présentes dans la taxonomie et les différentes catégories qui les composent. Le tout est représenté sous forme d’un escalier à deux dimensions. Tiré de Brouwer et al. (2013).

2. Description du projet pédagogique

a. Description du cours

Le cours considéré dans ce projet s'intitule *Aspects Théoriques de Physique Fondamentale I*. Il s'agit d'un cours obligatoire dans le plan d'étude du bachelor en physique et dans le plan d'étude de la branche complémentaire physique. Il est donné à chaque semestre de d'automne et vaut 4 ECTS. Il consiste en deux cours par semaine, le mardi de 08:15 à 10:00 et le jeudi de 10:15 à 12:00. Selon la description du cours et le plan d'étude, aucune session d'exercice n'est prévue pour ce cours. Les différents chapitres abordés dans ce cours sont les suivants:

1. Vecteurs et systèmes de coordonnées
2. Cinématique du point matériel
3. Dynamique du point matériel
4. Lois de conservations
5. Gravitation de Newton
6. Collisions de particules
7. Ondes
8. Diffusion

Le détail des chapitres 1, 2 et 3 sont disponibles dans les annexes. D'un point de vue de l'équipe enseignante, le cours est donné en français pour les chapitres 1, 2, 3 et 7 par le Dr. Luis Froufe et le reste des chapitres sont enseignés en allemand par le Prof. Joseph Brader. Il n'y a pas d'assistants prévus pour ce cours, sauf pour cette année, où l'auteur de ce travail agit en tant qu'assistant dans la conception du cours aussi bien que dans sa réalisation, afin d'accomplir son travail de fin d'études pour le DAS en didactique de l'enseignement supérieur et technologies de l'éducation.

Selon l'annuaire en ligne des cours donnés à l'université de Fribourg, les objectifs généraux sont les suivants:

- Appliquer les techniques du calcul vectoriel
- Exprimer l'équation de Newton dans différentes coordonnées
- Résoudre les équations différentielles linéaires.
- Appliquer les techniques Série et transformée de Fourier.

Il est clair que cette liste n'est pas du tout exhaustive et que les objectifs devraient être définis plus en détail et par chapitre. Il convient par contre de se concentrer un instant sur le contexte de ce cours à l'intérieur du plan d'étude. Il est généralement suivi en parallèle du cours de physique générale propédeutique de première année et contient les mêmes sujet, mais se concentre plus sur une formulation mathématique rigoureuse, en utilisant le calcul différentiel et intégral et en démontrant les résultats obtenus, ce qui n'est pas forcément le cas dans le cours de physique propédeutique, qui a pour but d'introduire la physique aux étudiant·e·s en bachelor de tous les domaines des sciences naturelles (biologie, chimie, etc.).

b. Retour des expériences provenant des années précédentes

Le choix d'effectuer ce projet professionnel dans le contexte de ce cours provient de nombreuses discussions avec le Dr. Luis Froufe, ayant donné ce cours lors des années précédentes. En effet, il n'était pas convaincu de la méthode employée pour ce cours, pour les raisons suivantes:

- Le niveau d'activation pédagogique est très faible. Les étudiant·e·s participent peu et ne font pas les exercices qui sont intégrés au cours (pas de sessions d'exercices dédiée par manque de temps).
- Les étudiant·e·s arrivent avec des niveaux très différents comme il s'agit d'un cours de première année. Il n'y a pas de différenciation qui est implémentée et certains s'ennuient alors que d'autres trouvent la matière trop difficile, notamment au début des chapitres.
- Les étudiant·e·s en physique sont en général très réticents à l'activation pédagogique.
- Les résultats de l'évaluation du service qualité de l'Université étaient plutôt mitigés.

Pour ce travail de fin d'études, il a donc été décidé de réviser le scénario pédagogique du cours en question, pour la partie du Dr. Luis Froufe, alors que la partie du Prof. Brader resterait inchangée, pour des questions de charge de travail et de ressources.

c. Proposition de révision du scénario pédagogique du cours

Pour activer pédagogiquement le cours, l'idée est de procéder comme suit: Tout d'abord, la matière du cours (éléments des théorie et exercices) sera divisée en 4 niveaux allant de une étoile (*) pour les plus basiques à quatre étoiles (****) pour les éléments sortant presque du cadre du cours. La classification de tous les éléments du cours est disponible en annexe et les différents niveaux sont définis comme suit:

- Niveau *: Les bases du cours, comme les définitions et les connaissances procédurales de base. Cela correspond à des niveaux taxonomiques extrêmement bas, du type Connaissance factuelle-Mémoriser. *Par exemple*: Réciter la loi de Newton, ou la méthode pour calculer une dérivée d'une puissance de x .
- Niveau **: Le corps du cours, correspondant à des niveaux taxonomique plus avancés, comme Connaissance procédurale-Appliquer. *Par exemple*: Résoudre un problème en utilisant les coordonnées polaires.
- Niveau ***: Compétences plus avancées, non nécessaires pour continuer son parcours dans le plan d'études dans un futur proche. Correspondait à des niveaux taxonomiques similaires à la catégorie **, voir supérieurs, du type Connaissance procédurale-Créer. *Par exemple*: Définir et utiliser d'autres systèmes de coordonnées.
- Niveau ****: Eléments du cours permettant de mettre en contexte les autres éléments dans le futur professionnel ou académique des étudiant·e·s. *Par exemple*: Les coordonnées homogènes dans les jeux vidéos.

Ensuite chaque séquence d'enseignement (chapitre) se déroulera comme suit:

- 1) Une partie à faire à la maison. Il s'agit là de vidéos et exercices pour tout ce qui est classé au niveau *.
- 2) Une partie de théorie pour aller plus loin dans les niveaux ** et ***. Une mise en contexte des éléments abordés sera aussi incluse.
- 3) Une session interactive dans la salle du teaching & learning space, permettant aux étudiant·e·s de résoudre des exercices de niveau ** et ***, ou alors d'approfondir vers le niveau ****.
- 4) A la fin de chaque chapitre, un résumé sera proposé sous forme de vidéo (interview).

En plus d'implémenter la différenciation, la partie à la maison permet de gagner du temps sur les heures de théorie en classe et donc de proposer une session d'exercice interactive.

3. Mise en place

a. Bloc de cours type

Dans cette section, les détails de la mise en place du scénario pédagogique présenté dans le chapitre précédent sont détaillés. La première partie du cours s'est déroulée en 4 blocs, 1 pour le chapitre 1, 1 pour le chapitre 2 et 2 pour le chapitre 3. Le calendrier du cours est disponible dans les annexes. Il a parfois dû être un peu adapté, comme par exemple en mettant deux cours de théories à la suite, pour des raisons de disponibilités de la salle utilisée pour les sessions interactives.

Session @home

Une session @home doit être complétée par les étudiant·e·s pour au plus tard le jour du cours théorique qui suit. Le matériel est mis à disposition entre 2 et 4 jours avant, pour ne pas empiéter sur les activités précédentes. La session @home se passe sur la plateforme moodle, où une vidéo d'environ 30 minutes, un chapitre du script et un quiz sont disponibles. Les éléments du script de niveau * sont spécifiées aux étudiant·e·s dans les instructions présentes dans la section moodle correspondante. Dès lors, les étudiant·e·s ont la possibilité de prendre le temps qu'ils souhaitent pour parcourir la matière, qu'elle soit nouvelle ou déjà connue. A la fin de la session, les étudiant·e·s ont la possibilité de répondre à un quiz sous forme de questionnaire à choix multiple. Ce questionnaire permet aux étudiant·e·s de se situer dans leur apprentissage et aux enseignant·e·s de vérifier que les étudiant·e·s ont le niveau requis pour le cours théoriques, ou alors pour pouvoir l'adapter au besoin. Le quiz se termine toujours par une question réflexive ou il est demandé à l'étudiant·e de se situer dans son apprentissage et éventuellement faire des remarques, positives ou négatives, sur le cours. En retour, les enseignant·e·s s'engagent à leur répondre dans la semaine. Les quizzes pour les différents chapitres sont disponibles en annexe.

Cours Théorique

Une fois la session @home effectuée, un cours en format classique a lieu. Les outils utilisés sont le tableau noir, le script et éventuellement des transparents pour la présentation de figures complexes qui sont trop compliquées à dessiner ou prennent trop de temps. L'idée de ces cours est d'approfondir la matière en abordant les sujets classés ** et *** à un rythme de réflexion et d'écriture beaucoup plus lent que dans une vidéo, permettant ainsi de comprendre les différents éléments en grande profondeur. Bien sûr, les questions des étudiant·e·s sont les bienvenues et l'interactivité n'est absolument pas exclue. Il est d'avis de l'équipe des enseignant·e·s qu'il est nécessaire de passer par un cours de ce genre pour pouvoir comprendre un sujet dans les détails et ainsi être capable de résoudre des problèmes de tous niveaux de difficulté seul ou en groupe, comme dans la session interactive qui suivra.

Session d'exercices interactive

Les sessions d'exercice interactives ont lieu dans la salle B205 du Learning Lab de l'Université de Fribourg. Une photographie de la salle est montrée sur la Figure 2. Cette salle est intéressante car elle dispose d'une grande modularité et comporte 3 (voir 5 en comptant la salle d'à côté) écrans tactiles permettant de collaborer en groupes et de sauver les produits de la collaboration en pdf. Durant ces sessions, il est généralement demandé aux étudiant·e·s de former des groupes de 3 à 5 personnes et de résoudre pour commencer un des problèmes proposés (un exercice différent pour chaque groupe, au moins pour le premier exercice). Après une heure de travail durant laquelle les enseignant·e·s passent dans les groupes pour répondre aux questions ou les réorienter si leur méthode de résolution ne s'avère pas appropriée, chaque groupe présente brièvement son travail aux autres groupes et le produit du travail des groupes est téléchargé sur moodle. Les séries d'exercices utilisées sont disponibles en annexe.



Figure 2 – Salle B205 du Learning Lab de l'Université de Fribourg (Teaching and Learning Space). Sur la photographie, les écrans tactiles ne sont pas visibles. Photographie reprise de (Room and Equipment Booking | Compétences Numériques Et Didactique Universitaire | Université De Fribourg, 2025)

b. Concept d'évaluation

Afin d'observer l'impact de cette méthodes sur les étudiant·e·s et de proposer une boucle de rétroaction, 3 outils sont utilisés. Il s'agit des suivants:

- Un formulaire d'évaluation basée sur la méthode OURA (oura.ch). Cette méthode permet d'évaluer des aspects clés comme le sentiment de compétence, l'utilité perçue, la transférabilité, la prise de conscience ou l'intérêt des étudiant·e·s, la concentration dans la classe ou le plaisir à suivre le cours. Pour les évaluer, chaque aspect est sondé par plusieurs affirmations à sens positif ou négatif avec une réponse possible entre 1 et 6 représentant le degré d'approbation des étudiant·e·s. Cela permet d'attribuer un score à moyen et médian à chaque aspect (Il est à noter que le score des affirmations positives est considéré en prenant son complément à 6.). Les formulaires d'évaluation se trouvent en annexe. Il a été choisi d'utiliser des formulaires papier, car le processus est beaucoup plus léger pour les étudiant·e·s qui n'ont pas besoin d'appareil électronique et de se connecter pour répondre à un rapide questionnaire. Pour les sessions interactives, des aspects collectifs et sociaux sont également ajoutés, comme le stress ou le fonctionnement collectif.
- Les quiz des sessions @home comprenant des questions à choix multiple portant sur la matière et les questions réflexives portant sur l'expérience vécue par l'étudiant·e et la réalisation du cours.
- Des feedbacks lors de discussions directes avec les étudiant·e·s.

c. Résultat de l'évaluation

Les Figures 3 et 4 représentent les résultats de l'évaluation par formulaire, pour les cours théoriques et les sessions interactives. Les résultats obtenus avec les autres méthodes seront traités dans le chapitre 4. Tout d'abord, pour les cours de théories, on remarque que certains aspects comme la prise de conscience, l'intérêt personnel ou la transférabilité restent plus ou moins constants à travers le cours. Cependant, le sentiment de compétence augmente avec le temps, montrant une activation pédagogique du point de vue de la motivation et de l'engagement des étudiant·e·s.

Pour les sessions interactives, on notera que l'aire contenue dans la courbe a énormément augmenté entre la deuxième et la troisième session, cela est certainement dû à une prise de conscience des enseignant·e·s qui ont adapté les exercices après la deuxième session interactive (là où le sentiment de compétence est tombé très très bas). Cela montre que prendre en compte les résultats de l'évaluation est important pour l'apprentissage des étudiant·e·s. Par contre, les étudiant·e·s se sentaient plus stressé·e·s, même si les exercices étaient plus abordables. Cela est peut-être lié à la diminution du nombre d'étudiant·e·s en classe (abandons classiques en première année) et donc une plus forte exposition aux enseignant·e·s qui passent dans les groupes.

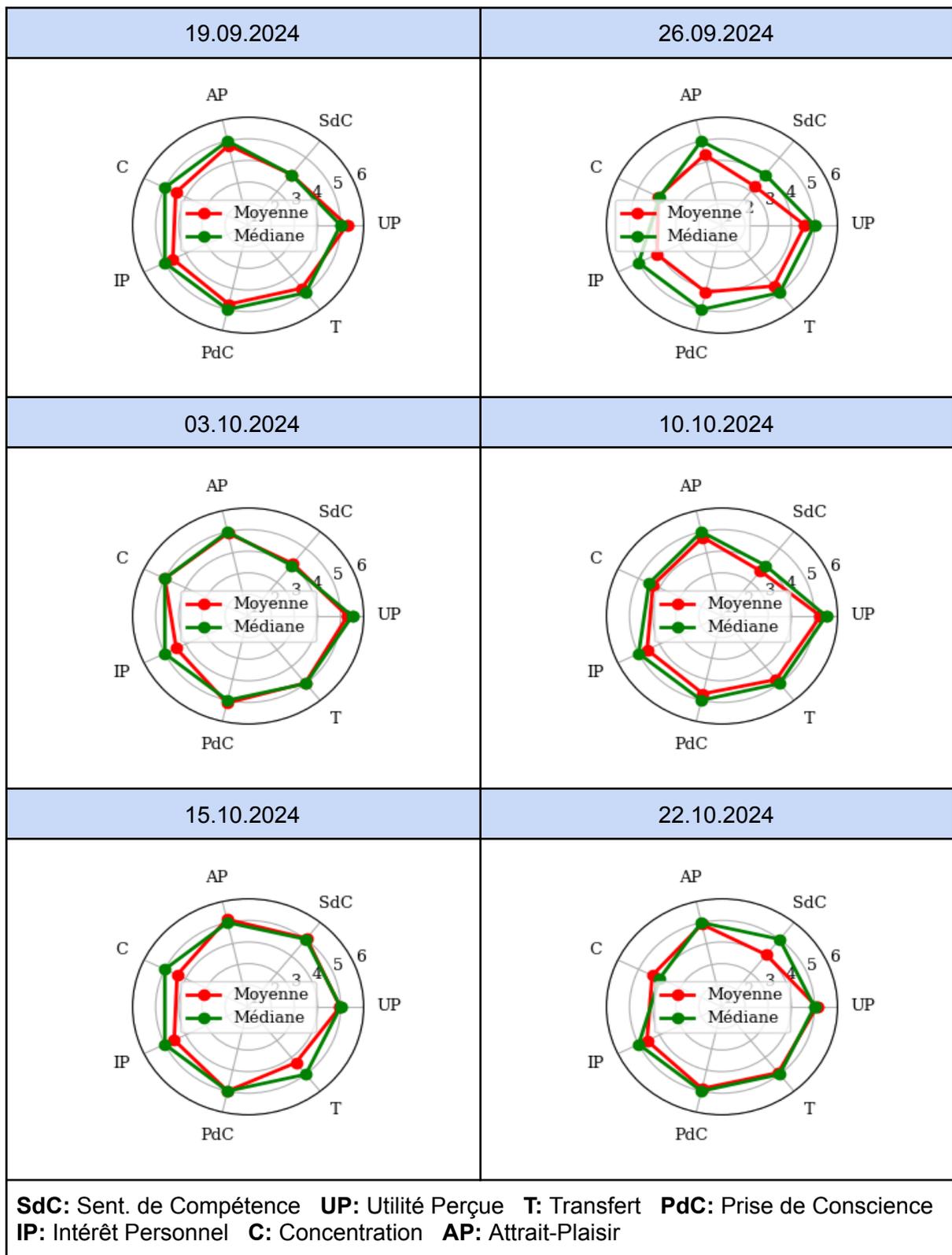


Figure 3 – Résultats de l'évaluation à la fin de chaque cours de théorie.

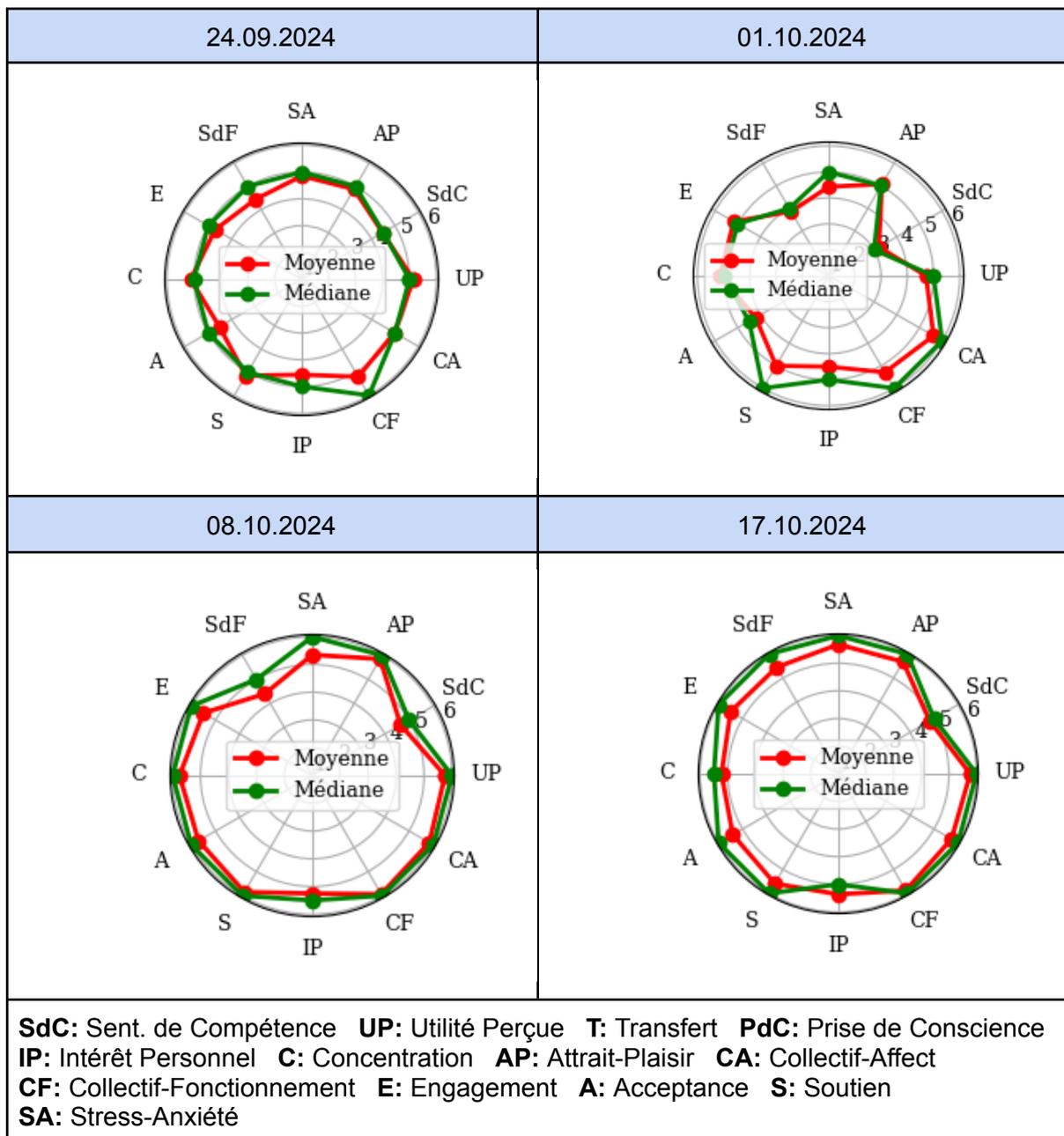


Figure 4 – Résultats de l'évaluation à la fin de chaque session interactive.

Il est à noter qu'il est impossible de tirer des conclusions fermes avec ce système d'évaluation car l'échantillon des étudiant·e·s est très pauvre et qu'il faudrait reconduire plusieurs fois l'expérience en isolant les paramètres afin d'avoir des résultats sûrs.

4. Discussion

Cette section est relative à mon expérience personnelle vécue à travers ce projet. C'est pour cela que je me permets de parler en "je". Les autres enseignants à qui je fais référence dans mon texte font référence à Dr. Luis Froufe et éventuellement Prof. Joseph Brader, tous deux co-enseignants et responsables de ce cours.

a. Retour d'expérience

Afin de commencer la partie réflexive de ce travail, je souhaite mentionner quatre situations vécues durant la réalisation de ce projet, afin de lancer des pistes de discussion et de réflexion. Pour chacune d'elles, une brève discussion des différents aspects identifiés ayant besoin d'être discutés plus tard est donnée.

Situation 1: Cette situation a eu lieu durant la troisième session interactive tenue au Learning Lab de l'UNIFR. J'avais remarqué précédemment qu'un·e étudiant·e avait de très grosses difficultés avec les sujets de base abordés dans le chapitre 2, le chapitre de la cinématique, et plus précisément avec la notion de dérivée. De plus, le peu de résultats obtenus par cet·te étudiant·e lors des quiz de la partie @home confirmait que ces concepts de base n'étaient pas acquis. Lors de la session interactive en question, la difficulté des exercices avait été légèrement revue à la baisse, ou du moins le niveau de guidage avait été augmenté. Le groupe d'étudiant·e·s auquel appartenait cet·te étudiant·e ayant terminé la résolution des exercices proposés, a pris le temps restant à disposition pour revoir une partie d'un exercice qu'il·elle n'avait pas compris en raison du manque de maîtrise de la notion de dérivée. Cet·te étudiant·e qui avait de grandes difficultés avec le cours (du moins dans sa première moitié), a finalement réussi l'examen.

Éléments mis en évidence: Grâce à l'activation et à l'interactivité de la séquence d'enseignement mise en place par ce projet professionnel, l'étudiant·e en question profite de nouvelles opportunités pour améliorer son apprentissage. De plus, cette opportunité est apportée de manière spontanée par ses camarades. En tant qu'enseignant, il est également extrêmement gratifiant d'observer une situation de ce genre suite à l'implémentation de nouvelles méthodes d'activation.

Situation 2 : Comme chaque semaine, je réponds aux commentaires et questionnements des étudiant·e·s, comme demandé dans le quiz de session @home à effectuer sur la plateforme moodle. Pour une douzaine de commentaires, cela me prend en général une bonne heure. En effet, bien que la base de ma réponse soit générique et copiée-collée, je prends le temps

de répondre à tous leurs questionnements et réagir à leurs remarques, qu'elles soient positives ou négatives. Ce faisant, je tombe sur les deux commentaires suivants :

« Je trouve cette méthode vraiment top, personnellement, j'ai l'impression que cela m'apportera beaucoup pour la suite, car je sais qu'elles sont les points sur lesquels je dois me concentrer. Le test m'a montré que je devais me concentrer sur les bases et les coordonnées polaires, parce que j'ai vu que j'avais des lacunes dans ces domaines. Merci d'avance pour la suite »

« J'ai suivi les cours de vidéos qui étaient assez clair même si la calligraphie du présentateur laisse à désirer. »

Même si le premier de ces deux commentaires est encourageant et motivant, le deuxième, bien que tout-à-fait justifié, est plus difficile à accepter, majoritairement en raison de son ton inapproprié.

Éléments mis en évidence : Comme le montre la situation, la confrontation avec les commentaires des étudiant·e·s peut être très valorisante ou alors difficile à digérer suivant le contenu. Mettre en place une boucle d'évaluation des enseignements est donc coûteux en termes de ressources de travail et émotionnelles.

Situation 3 : Cette situation a lieu un matin avant le rendu de la session @home (pour le lendemain matin à 8h00). Pour rappel, les sessions @home consistent en un travail individuel sur le script, le quiz et une vidéo. Cependant, je remarque que la vidéo n'a toujours pas été mise en ligne par l'enseignant chargé de le faire. Je lui écris donc pour me renseigner sur l'état de la préparation. Malheureusement, la vidéo qu'il avait enregistrée un jour plus tôt a disparu de ses fichiers. Il doit donc recommencer à l'enregistrer avant de la télécharger sur le modèle. Cependant, un problème technique avec son logiciel d'édition de vidéos lui prend trois heures de plus que prévu. Au final, nous nous retrouvons avec beaucoup de temps investi ou perdu ainsi qu'avec des étudiant·e·s se posant des questions quant à la tenue de la session @home.

Éléments mis en évidence : Le temps de préparation requis pour la révision du scénario pédagogique de ce cours est très grand. En effet, il faut prévoir énormément de temps pour préparer, en partant de zéro, tous les éléments du cours avec l'outil pédagogique correspondant. Certains de ces outils pédagogiques étant plutôt complexes à utiliser, des imprévus techniques peuvent entrer en jeu, retardant ainsi la mise à disposition des ressources aux étudiant·e·s et convoyant ainsi une image négative des enseignants.

Situation 4 : Les examens liés à ce cours ont eu lieu durant la session d'hiver 2025, sur trois jours. Le premier jour, à ma grande surprise, aucun des étudiant·e·s s'étant présenté à cet examen n'ont réussi. Les jours suivants, les choses se sont améliorées, mais toujours avec un bilan mitigé. Sur cette session, seuls les étudiant·e·s généralement présents aux

sessions interactives ont réussi l'examen, alors que plus d'étudiant·e·s étaient présents lors des cours en format traditionnel.

Éléments mis en évidence : La méthode proposée dans ce projet professionnel semble porter ses fruits si l'on s'en tient uniquement aux résultats des étudiant·e·s à l'examen. Cependant, cela peut aussi impliquer que le format du cours excluent les étudiant·e·s ayant de la peine à participer à des sessions interactives (difficulté avec les interactions sociales ou à travailler en groupe par exemple), ce qui constitue un manque du point de vue de la différenciation, une des raisons pour laquelle cette révision a été mise en place. Il est à noter que les examens portaient sur les deux parties du cours et pas uniquement la partie révisée.

Ces quatre différentes situations ayant été abordées, les pistes de réflexions proposées à travers des éléments mis en évidence peuvent maintenant être développées. Dans un premier temps, je décrirai les avantages et les challenges liés à l'implémentation de ce projet que j'ai identifiés, en les comparant à la revue de littérature de (Akçair et Akçair, 2018), ensuite, deux aspects seront développés en détail : les ressources personnelles engagées ainsi que les résultats à l'examen. Pour finir, des pistes d'améliorations seront proposées dans le cas d'une potentielle reconduite de ce projet.

b. Avantages observés

Dans cette section, je reviendrai sur les avantages observés par moi-même et les enseignants de ce cours suite à l'implémentation de la classe inversée. Le Tableau 3 contient tous ces avantages identifiés et les présente dans la même structure que le Tableau 1, afin de pouvoir comparer avec les résultats de la revue de littérature présentée au début de ce travail (Akçair et Akçair, 2018, p. 339).

Pour commencer, j'aimerais aborder les avantages liés à l'efficacité temporelle, car il s'agit d'avantages fondamentaux souhaités lors de l'implémentation de ce projet. Ce que j'ai remarqué, aussi bien que les autres enseignants, c'est que l'implémentation de la classe inversée a permis d'avoir un temps de classe plus efficace, grâce à la mise en place des sessions @home, mais aussi de laisser du temps pour des exercices sous la forme de sessions interactives, temps qui n'était pas prévu par le scénario pédagogique du cours avant sa rénovation.

Revenons à l'ordre du tableau et concentrons-nous sur la section des résultats d'apprentissages. Sur la base des interactions avec les étudiant·e·s, leurs résultats, les résultats de l'évaluation et les commentaires réflexifs lors des quiz, il est clair que les performances d'apprentissages durant le semestre sont améliorées. En effet, l'apprentissage est beaucoup plus linéaire et permet d'aborder des sujets plus avancés que lors du cours dans son scénario classique. De plus, j'ai ressenti (comme les autres enseignants pour ce cours), beaucoup plus d'engagement et de motivation, ce qui était attendu et souhaité. Bien qu'il soit difficile de se prononcer sur la quantité de connaissances acquises avec ce cours, les observations que j'ai faites durant les sessions interactives montrent que les étudiant·e·s améliorent leur pensée critique, leurs compétences de

résolution de problèmes ainsi que leur sentiment de confiance (montré également par les questionnaires d'évaluation) tout au long du cours, ce qui n'avait pas forcément été observé lors des précédentes éditions du cours. Par contre, je ne pense pas que la mise en place de ce système améliore leurs compétences TIC ou alors favorise la créativité, car les sujets abordés restent plus ou moins similaires, comparés aux éditions passées.

Tableau 3 – Avantages observés lors de l'implémentation de ce projet. À des fins de comparaison, les éléments sont repris du tableau de synthèse (Tableau 1) résumant les conclusions de (Akçair et Akçair, 2018, p. 339).

Avantages de l'implémentation de la classe inversée
Résultats d'apprentissages
<ul style="list-style-type: none"> ● Améliore les performances d'apprentissage. ● Satisfaction ● Engagement ● Motivation ● Améliore les compétences de pensée critique. ● Sentiment de confiance accru. ● Se concentre sur les compétences de résolution de problèmes. ● Améliore les compétences d'application.
Contributions pédagogiques
<ul style="list-style-type: none"> ● Apprentissage Flexible ● Permet un apprentissage individualisé. ● Meilleure préparation avant le cours. ● Offre des opportunités de collaboration. ● Permet plus de Feedback. ● Favorise l'apprentissage par des pairs. ● Soutient l'intérêt pour le cours. ● Améliore l'assiduité.
Efficacité Temporelle
<ul style="list-style-type: none"> ● Temps de classe plus efficace ● Plus de temps pour la pratique
Dispositions
<ul style="list-style-type: none"> ● Feedback positif des étudiant·e·s ● Perceptions positives (étudiant·e·s) ● Attitudes positives ● Perceptions positives (enseignant·e·s)
Interactions
<ul style="list-style-type: none"> ● Interactions étudiant·e·s-enseignant·e·s ● Interactions étudiant·e·s-étudiant·e·s
Autres
<ul style="list-style-type: none"> ● Adaptation rapide des étudiant·e·s

D'autre part, d'un point de vue des contributions pédagogiques, il est clair de part les observations faites que la méthode proposée propose un apprentissage flexible et individualisé, notamment grâce aux sessions @home, plutôt appréciées dans les commentaires des étudiant·e·s lors des quizzes. Ces sessions @home permettent aussi aux étudiant·e·s d'être mieux préparé·e·s aux leçons théoriques dans lesquelles le niveau était apparemment adapté (pour les étudiant·e·s qui s'étaient préparé·e·s) et l'interaction étudiant·e·s-enseignants mais également étudiant·e·s-étudiant·e·s lors des pauses ou des sessions interactives, permettant ainsi une augmentation de la collaboration et de feedback dans la classe (rentre aussi dans la catégorie interactions). Par contre, je ne pense pas que la méthode utilisée permette de favoriser l'autonomie et auto-efficacité, les étudiant·e·s devant travailler seuls pour une grande partie du cours, ce qui était déjà le cas dans les précédentes éditions. J'observe par contre clairement une assiduité et un intérêt accrus pour le cours, certainement liés à la motivation et l'engagement. J'émets tout de même des réserves concernant l'applicabilité d'un tel projet à un grand groupe, vu la charge de travail engendrée (nous y reviendrons dans les sections suivantes). Il est également à noter qu'aucune différence n'a été observée en rapport aux abandons du cursus d'étude, dont le nombre est tout à fait similaire à celui des années précédentes, tout en gardant à l'esprit que ce n'est pas ce cours seul qui influence les décisions des étudiant·e·s en bachelor de physique.

D'un point de vue général, et pour la majorité j'ai observé des feedback positifs de la part des étudiant·e·s et enseignants ainsi que des attitudes très positives, notamment lors des sessions interactives que j'ai eu la chance de co-animer. J'ai été également très impressionné par la capacité des étudiant·e·s à s'adapter à la nouvelle méthode proposée, surtout que la majorité d'entre eux ne connaissait pas les outils utilisés tels que moodle³.

³ Il est à noter qu'une introduction à ces outils dans le contexte particulier du cours a été donnée lors des deux premières périodes de ce cours et qu'un support assuré par moi-même était disponible à tout moment pour les étudiant·e·s en en ayant besoin.

c. Challenges observés

Dans cette section, je décris les challenges observés durant l'implémentation du projet. Le Tableau 4 contient tous ces challenges identifiés et les présente dans la même structure que le Tableau 2, afin de pouvoir comparer avec les résultats de la revue de littérature présentée au début de ce travail (Akçair et Akçair, 2018, p. 340).

Tableau 4 –Challenges rencontrés lors de l'implémentation de ce projet. À des fins de comparaison, les éléments sont repris du tableau de synthèse (Tableau 2) résumant les conclusions de (Akçair et Akçair, 2018, p. 340).

Challenges rencontrés lors de l'implémentation de la classe inversée
Pédagogie
<ul style="list-style-type: none">Le temps de préparation des étudiant·e·s est limité avant la leçon.
Perspective de l'étudiant·e
<ul style="list-style-type: none">Prends du temps.La charge de travail augmente.
Perspective de l'enseignant·e·s
<ul style="list-style-type: none">Prends du temps.Plus grande charge de travailPlanifications des séquences d'activités
Technique et Technologie
<ul style="list-style-type: none">Qualité des vidéosBesoin de compétences numériques (enseignant·e·s)

Du point de vue de la catégorie « Pédagogie », la plupart des challenges observés par la revue de littérature n'ont pas été retrouvés dans notre implémentation. Je pense que toute la partie technique (instruction aux étudiant·e·s, contrôle de la consultation des vidéos et du matériel de cours lors de la partie @home) n'a pas été un challenge grâce à l'utilisation de la plateforme moodle qui est selon moi extrêmement riche et indispensable dans la réalisation d'un tel projet de classe inversée. Cependant, un commentaire qui est apparu plusieurs fois dans les commentaires des étudiant·e·s donnés dans le cadre des quizzes de la session @home montre que leur temps est limité et qu'il n'ont pas toujours le temps de se préparer correctement avant la leçon. Cela pourrait être résolu, à mon avis, en mettant à disposition le matériel beaucoup plus tôt sur le moodle.

Du point de vue des étudiant·e·s, je suis plutôt surpris de ne pas avoir rencontré trop de résistance au changement. En effet, la résistance était une de mes craintes au début de ce projet, car j'avais par le passé essayé à plusieurs reprises d'activer l'enseignement lors de sessions d'exercices en les rendant plus interactives (travail en groupe au tableau, discussions), mais sans succès. Cela est selon moi dû au fait qu'il s'agit d'étudiant·e·s de

première année qui n'ont pas beaucoup d'expérience dans les méthodes d'enseignement à l'université et qui sont donc plus flexibles car non bloqués dans les méthodes rencontrées lors des années précédentes.

Je n'ai pas non plus identifié d'étudiant ayant un problème d'adoption ou d'acceptation de la méthode (y compris l'anxiété face au changement). J'aimerais soulever ici que cela ne signifie pas qu'aucun étudiant n'était dans une telle situation. En effet, cette méthode peut être excluante pour eux et faire que l'étudiant ne participe pas du tout aux activités du cours. Par exemple, tous les étudiant·e·s inscrit·e·s au cours n'ont pas complété les quiz des sessions @home. Cela pourrait être dû à des raisons autres que l'exclusion par la méthode, telles que le temps limité à disposition, la motivation ou un abandon du cursus en cours de semestre.

Cependant, en lisant les retours réflexifs des étudiant·e·s dans les quiz des sessions @home et en discutant avec eux au cours des sessions d'exercices interactives, je note qu'ils trouvent que la méthode leur prend plus de temps et nécessite plus de travail. Il s'agit ici d'un fait inhérent à l'implémentation de la classe inversée, mais je pense, de par mon expérience d'étudiant, qu'il s'agit ici d'un investissement qui réduira le temps de travail lors de la préparation à l'examen.

Du côté des enseignants, il est clair que le challenge principal se trouve dans l'allocation d'énormes ressources temporelles, de travail et de planification en parallèle du travail de chercheur. Ce challenge sera détaillé dans la section suivante, mais une des conclusions que je tire de cette expérience, c'est qu'il est nécessaire d'être plusieurs enseignants pour implémenter un tel projet. Pour ma part, j'ai trouvé que la coordination des différentes tâches de préparation, d'enseignement et de traitement des données avec mon supérieur a très bien fonctionné, certainement par le fait que nous n'étions que deux, que nous avons la possibilité d'échanger tous les jours et que nos tâches étaient bien définies. Je pense par contre qu'effectivement il peut s'agir d'un challenge de taille si l'équipe des enseignants est de grande taille.

Sur le plan technique et technologique, je n'ai pas identifié de problèmes du côté des étudiant·e·s, la plateforme moodle a été présentée lors du premier cours, avec les détails des différentes actions possibles pour les participants au cours. A mon avis, il est tout de même nécessaire de porter une grande attention au fait qu'il peut s'agir d'une condition excluant pour un étudiant et qu'il est donc nécessaire d'y être attentif. Par contre, les compétences numériques requises par l'enseignant constituent un challenge de taille. J'ai dû passer beaucoup de temps à explorer les possibilités et fonctionnalités de moodle afin d'arriver au produit fini. Je recommande donc de suivre un cours d'introduction à la plateforme, ce qui permet de gagner du temps.

Un autre grand challenge technique est la préparation des vidéos. Nous avons eu plusieurs remarques des étudiant·e·s au sujet de la qualité de celles-ci. L'enregistrement et l'édition de vidéos prennent énormément de temps et le résultat n'est pas forcément gratifiant. Trouver une méthode efficace d'édition des vidéos est une piste d'amélioration pour une éventuelle future édition du projet.

Pour finir, aucun problème n'a été rencontré vis-à-vis des infrastructures spécifiques requises, notamment pour les sessions interactives, grâce au soutien inestimable des services DidaNum de l'Université de Fribourg. En effet, nous avons pu réserver le *Teaching and Learning Space* du Learning Lab et donc vivre des sessions interactives très agréables grâce à la modularité de la salle et aux 3 grands écrans tactiles.

d. Réflexion quant aux ressources personnelles engagées.

Comme mentionné dans la section précédente, la grande quantité de ressources nécessaire est l'un des plus grands freins à l'implémentation de ce projet. Dans cette section, je donnerai quelques détails supplémentaires sur ces ressources et propose plusieurs pistes d'amélioration pour les minimiser.

Tout d'abord, je souhaitais me pencher sur les ressources temporelles, car, en effet, l'implémentation d'un tel projet prend énormément de temps. Afin de permettre au lecteur de s'en rendre compte, le Tableau 5 donne une estimation du temps nécessaire à la préparation des séquences d'enseignement et au traitement des résultats de l'évaluation des enseignements. Le tableau ne contient pas le temps requis pour la conception de ce projet, que je n'ai pas compté, mais qui se compte probablement en plusieurs jours de discussions et propositions.

Tableau 5 – Temps de préparation et de traitement nécessaire aux différents éléments du cours.

Eléments du cours	Temps nécessaire
Préparation du quiz @home	1h (avec traduction en 3 langues)
Préparation de la vidéo @home	3h (préparation, tournage et édition)
Organisation du moodle	30min par chapitre
Révision du script	jusqu'à 12h
Préparation d'un cours théorique	2x la durée du cours
Préparation d'une série d'exercices	5h
Préparation d'une session interactive	1h (30 min préparation 30 min mise en place)
Traitement de données et quiz	5 min par étudiant (1-2h environ au total)
Traitement des données de l'évaluation	3min par étudiant (1h environ au total)

Personnellement, l'implémentation du projet me prenait 2 à 4 heures de plus par semaine que la préparation des tâches d'enseignement habituelles. Cela souligne à mon avis le

besoin de réaliser ce genre de projet par équipe et non seul. Pour ce projet, et avec le nombre d'étudiant·e·s inscrit·e·s, le temps de travail supplémentaire engendré a permis de continuer les autres tâches qui m'incombent, telles que la recherche ou l'enseignement dans d'autres cours.

Dans une optique de gain de temps et de productivité, je souhaite également aborder l'utilisation des grands modèles de langage (*Large Language Models*, LLM, en anglais) tels que ChatGPT ou Microsoft Copilot dans la préparation des cours et le traitement des données d'évaluation. En effet, l'utilisation de tels outils d'intelligence artificielle m'a permis de gagner beaucoup de temps que j'aurais perdu sur des tâches simples et répétitives. Par exemple, je les ai beaucoup utilisés lors de la préparation des quizzes en leur donnant des instructions génératives afin de générer des questions à choix multiples lié à un aspect du chapitre en cours. Cela permet de produire facilement 5 propositions différentes, dont une correcte, ce qui peut prendre passablement de temps. Bien sûr, il m'est nécessaire d'être extrêmement rigoureux dans la vérification des résultats générés par les modèles, afin d'être sûr qu'il y a une unique réponse juste correspondant à la question posée. D'autre part, j'ai également utilisé ce genre de modèles pour la traduction des quiz en français, allemand ou anglais (tout en faisant une double vérification). Dans le cadre du traitement des données d'évaluation, j'ai utilisé des LLMs dans le but d'automatiser des tâches répétitives (report de réponse sur questionnaire et visualisation par exemple). Pour ce genre de tâches, à nouveau, une double vérification a toujours été effectuée et aucune interprétation n'a été demandée aux modèles, qui ne sont pas conçus pour de telles tâches complexes.

Pour terminer cette section sur les ressources personnelles engagées dans le projet, je souhaite aborder le sujet des ressources émotionnelles. Le fait de mettre en place une boucle de régulation à l'aide d'une méthode d'évaluation des enseignements apporte à mon avis beaucoup à la qualité de l'enseignement, à l'activation pédagogique et la différenciation mais expose l'enseignant aux critiques de manière beaucoup plus frontales. En effet, certains commentaires négatifs, notamment dans les parties réflexives du quiz des sessions @home sont parfois difficiles à accepter après tant d'heures de préparation, bien qu'ils soient respectueux et bienveillants.

e. Réflexion quant aux résultats à l'examen.

Lors de la session d'hiver 2025, 17 étudiant·e·s se sont présenté·e·s à l'examen pour le cours "Aspects Théoriques de la Physique fondamentale". Pour rappel, l'examen consiste en un oral de 30 minutes dont la moitié est dédiée aux chapitres 1,2,3 et 7 (partie enseignée par le Dr. Luis Froufe) et l'autre moitié au reste du cours (enseigné par Prof. Joseph Brader).

Sur les 17 étudiant·e·s inscrit·e·s, 7 ont obtenu un résultat insuffisant de 2.5 à 3.5 et 10 ont passé l'examen avec des notes de 4.5 à 6. La Figure 5 montre la distribution des notes pour la session en question.

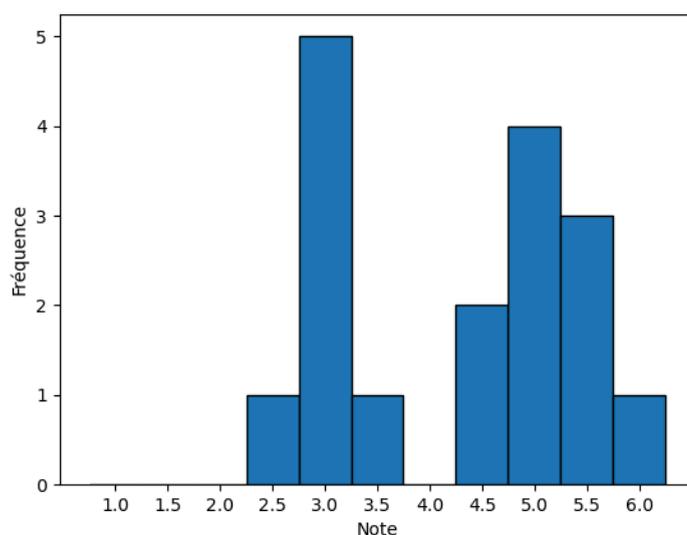


Figure 5 – Notes obtenues par les étudiant·es lors de de la session d'examen d'hiver 2025.

Pour cette session, il a été remarqué que les étudiant·e·s ayant réussi l'examen sont également ceux qui avaient participé au projet dans son entièreté (participation active régulière aux session @home, cours de théorie et sessions interactives). Les étudiant·e·s ayant obtenu des notes insuffisantes étaient par contre plus absents, voire inconnus des enseignants. D'une part, je pense que cela montre que la méthode a porté ses fruits, mais, par contre, cela peut être également un indice qu'elle peut être excluante (les étudiant·e·s qui ont échoué ne se sont peut être pas assez impliqués dans le cours à cause de la méthode d'enseignement différente des autres cours, tout en gardant en tête qu'il y aura toujours des étudiant·e·s qui ne s'impliqueront pas entièrement, quelle que soit la méthode). Cependant, il est bien sûr impossible de tirer des certitudes sur un si petit échantillon d'étudiant·e·s et de réalisation du cours et il s'agit peut être juste d'une coïncidence. Je me réjouis par contre de voir les résultats des étudiant·e·s ne s'étant pas présenté·e·s à cette session au cours des prochains examens.

f. Pistes d'amélioration pour une éventuelle reconduite

À la lumière des avantages et des challenges observés lors de l'implémentation de ce projet, il est plutôt clair pour moi (et les autres enseignants) que ce projet pourrait et devrait être reconduit. Cependant, j'é mets ici quelques pistes d'amélioration pour que l'expérience soit encore meilleure tant pour les enseignants que les étudiant·e·s:

Piste 1, Préparation: Il serait préférable de s'y prendre encore plus à l'avance pour ce qui est de la préparation des éléments du cours (plusieurs mois avant le début du semestre). En effet, cela permettrait de télécharger les différents contenus sur moodle en avance et donc laisser plus de temps aux étudiant·e·s pour les étudier et libérer le temps de travail des enseignants pour d'autres tâches.

Piste 2, Ressources: Il est important de ne pas se lancer seul dans une telle reconduite. Bien qu'il y ait moins de travail de préparation à effectuer, il est préférable d'être au

minimum deux enseignants, également pour plus de flexibilité. Je suggérerais donc de nommer un assistant officiel pour ce cours, ce qui n'était pas le cas cette année ou j'ai pris ce rôle de par mon travail de fin d'études.

Piste 3, Outils: Il est nécessaire d'utiliser des outils adaptés, notamment pour les vidéos. Cela permet de gagner beaucoup de temps et d'énergie lors de la préparation. Pour ce qui est de la plateforme d'échange générale pour le cours, Moodle est parfaitement adapté et pourrait même être utilisé de manière plus extensive.

Piste 4, Méthode d'évaluation: Évaluer chacune des séquences d'enseignement n'est à mon avis pas nécessaire car cela demande beaucoup de temps pour traiter les données et est contraignant pour les étudiant·e·s qui doivent remplir les questionnaires qui se ressemblent tous. Je pense qu'il serait suffisant d'évaluer une séquence sur deux, ce qui permettrait quand même de créer une boucle de régulation raisonnable et réactive.

Piste 5, Méthode excluante: Si le projet est reconduit, je souhaite être d'autant plus attentifs aux étudiant·e·s qui ne participent pas ou peu au cours, en étant sûr que cela n'est pas dû à la méthode utilisée.

Je pense également qu'il y a beaucoup d'autres pistes d'amélioration. Cependant, les 5 pistes présentées ci-dessus sont les plus importantes à mes yeux. Si les conditions me le permettent, je me réjouis d'ores et déjà de remettre sur pied le projet lors du semestre d'automne 2025. Par ailleurs, ce projet a déjà eu des échos au sein du département de physique et j'ai déjà été contacté par d'autres enseignants intéressés à mettre en place une méthode similaire.

Conclusion

La rénovation du scénario pédagogique du cours « Aspects Théoriques de Physique Fondamentale » par, entre autres, l'implémentation de la classe inversée a permis de répondre à plusieurs défis rencontrés lors des années précédentes. Bien que l'échantillon d'étudiant·e·s soit restreint et que ce projet n'a eu lieu que sur un semestre, nous observons un engagement et une motivation accrue de la part des étudiant·e·s. Lors des sessions interactives, les étudiant·e·s ont montré de l'intérêt et ont pu s'entraider, afin de résoudre des problèmes qu'ils ne résolvaient pas (par manque d'intérêt ou de temps) lors des précédentes éditions du cours.

Cependant, l'implémentation de la classe inversée n'a pas été sans défis. La préparation des éléments du cours a nécessité une grande quantité de ressources temporelles, de travail et émotionnelles. Il est également supposé que certains étudiant·e·s ont exprimé des difficultés à s'adapter à cette nouvelle méthode. Il est donc essentiel de continuer à affiner et à améliorer le scénario pédagogique pour répondre aux besoins de tout·e·s les étudiant·e·s et alléger les tâches des enseignant·e·s.

Cette méthode sera très certainement reconduite lors de la prochaine édition de ce cours. Pour ce faire, en tenant compte des pistes d'amélioration évoquées dans ce travail. Des discussions pour appliquer ces méthodes à d'autres cours de physique plus avancés, comme l'introduction à la physique du solide, sont d'ailleurs en cours avec d'autres enseignant·e·s du Département de physique.

Bibliographie

Akçayır, G., & Akçayır, M. (2018). The flipped classroom: A review of its advantages and challenges. *Computers & Education* 126, 334-345.

Anderson, L. W., & Krathwohl, D. R. (2001). *A Taxonomy for Learning, Teaching, and Assessing : A Revision of Bloom's Taxonomy of Educational Objectives*. Pearson.

Bates, S., & Galloway, R. (2012). The inverted classroom in a large enrolment introductory physics course: a case study. *Proceedings of the HEA STEM learning and teaching conference*, 1.

Bergmann, J., & Sams, A. (2009). Remixing Chemistry Class: Two Colorado Teachers Make Vodcast of Their Lectures to Free up Class Time for Hands-on Activities. *Learning and Leading with Technology*, 36, 22-27.

Bergmann, J., & Sams, A. (2012). *Flip Your Classroom: Reach Every Student in Every Class Every Day* . International Society for Technology in Education.

Bloom, B. S. (1956). *Taxonomy of Educational Objectives : The Classification of Educational Goals*. New York : Longmans, Green.

Bonwell, C. C., & Eison, J. A. (1991). *Active learning: Creating excitement in the classroom*. Washington, DC: School of Education and Human Development, George Washington University.

Brouwer, N., Dekker, P. J., & Van Der Pol, J. (2013). *E-Learning Cookbook : TPACK in Professional Development in Higher Education*. Amsterdam University Press.

Chi, M. T. H., & Wylie, R. (2014). The ICAP Framework: Linking Cognitive Engagement to Active Learning Outcomes. *Educational Psychologist*, 49(4), 219–243.

De Clercq, M.; Wouters, P. ; Raucant, B. (2020). Oser la pédagogie active Quatre clefs pour accompagner les étudiant·es dans leur activation pédagogique

Krathwohl, D. R. (2002). A Revision of Bloom's Taxonomy : An Overview. *Theory Into Practice*, 41(4), 212-218.

Lage, M. J., Platt, G. J., & Treglia, M. (2000). Inverting the Classroom: A Gateway to Creating an Inclusive Learning Environment. *The Journal of Economic Education*, 31, 30-43.

Lai, C.-L., & Hwang, G.-J. (2016). A Self-Regulated Flipped Classroom Approach to Improving Students' Learning Performance in a Mathematics Course. *Computers & Education*, 100, 126-140.

Réservation des salles et du matériel | Compétences numériques et didactique universitaire | Université de Fribourg. (2025). Service De Didactique Universitaire et Compétences Numériques. <https://www.unifr.ch/did anum/fr/learning-lab/reservation.html>

Annexes

A. Calendrier du cours

n°	Ma. 17.9, 1.73	@home	Jeu. 19.9, 1.73
1	-Pres. du cours et du format - Pres. de la structure, en contexte.	Tous les éléments ★ pour le chapitre 1. (vidéo+quiz) +challenge.	Tous les éléments ★★ et ★★★ et ★★★★ pour le chapitre 1.
n°	Ma. 24.9, B205	@home	Jeu. 26.9, 1.73
2	Exercices chapitre 1, ★★, ★★★ et ★★★★ + réserve	Tous les éléments ★ pour le chapitre 2. (vidéo+quiz), +challenge.	Tous les éléments ★★ et ★★★ pour le chapitre 2.
n°	Ma. 01.10, B205	@home	Jeu. 03.10, 1.73
3	Exercices chapitre 2, ★★, ★★★ et ★★★★ + réserve	éléments ★ pour le chapitre 3: vol parabolique (vidéo+quiz), +challenge.	éléments ★★ et ★★★ pour le chapitre 3.
n°	Ma. 08.10, B205	@home	Jeu. 10.10, 1.73
4	Exercés: - Expansion de Taylor - Pendule - Tige tournante	éléments ★ pour le chapitre 3:nombres complexes (vidéo+quiz), +challenge.	éléments ★★ et ★★★ pour le chapitre 3.
n°	Ma. 15.10, 1.73	Jeu. 17.10, B205	@home
5	éléments ★★ et ★★★ pour le chapitre 3.	Exercices chapitre 3, ★★, ★★★ et ★★★★ + réserve	Résumé partie Luis Froufe

B. Répartition des éléments du cours en catégories

Rappel de la table des matières pour les cinq premières semaines

1	Vectors and Coordinate Systems	1
1.1	Position Vector	1
1.2	Scalar Product	2
1.3	Vector Product and Mixed Product	4
1.4	Coordinate Systems	5
1.4.1	Cartesian Coordinates (x, y, z)	6
1.4.2	Polar Coordinates (ϱ, φ)	6
1.4.3	Cylindrical Coordinates (ϱ, φ, z)	7
1.4.4	Spherical Coordinates (r, ϑ, φ)	8
2	Kinematics of a Point Mass	9
2.1	Derivative and Differential	9
2.1.1	Definitions	9
2.1.2	Examples of Derivatives and Differentials	10
2.1.3	Total Differential	11
2.2	Velocity and Acceleration	12
2.2.1	Angular Velocity	13
2.2.2	Velocity and Acceleration in Cylindrical Coordinates	14
2.2.3	Velocity in Spherical Coordinates	15
3	Dynamics of a Point Mass	17
3.1	Applications of Newton's Law	17
3.1.1	Projectile Motion	17
3.1.2	Plane Pendulum	20
3.1.3	Bead Sliding along a Rotating Rod	22
3.2	Linear Differential Equations	23
3.3	One-dimensional Harmonic Oscillator	24
3.3.1	Damped Oscillator	24
3.3.2	Forced Oscillator	27
3.3.3	Complex Representation	29

Chapitre 1			
★	★★	★★★	★★★★
- 1.1 - 1.2 - 1.3 - 1.4.1 et 1.4.2	- 1.4.3 - 1.4.4	- Other systems of coords. - Bases and orthonormality	- "Homogeneous coordinates, videogames and supercomputers"

Exercices 1			
★	★★	★★★	★★★★
3,7	1,2,5,8,9,10	4,6	6e)

Chapitre 2			
★	★★	★★★	★★★★
<ul style="list-style-type: none"> - 2.1.1 - 2.1.2 - 2.2 	<ul style="list-style-type: none"> - 2.1.3 - 2.2.1 - 2.2.2 - 2.2.3 - Units and objects 	Rien	Nothing

Exercices 2			
★	★★	★★★	★★★★
5	1,2,6	3,4,7	Nothing

Chapitre 3			
★	★★	★★★	★★★★
<ul style="list-style-type: none"> - Newton's law - 3.1.1 - Complex Numbers 	<ul style="list-style-type: none"> - 3.1.2 - 3.1.3 - 3.2 - 3.3.1 - 3.3.2 - 3.3.3 	<ul style="list-style-type: none"> - One spring, two masses - One mass, two springs, two walls. 	<ul style="list-style-type: none"> - One mass, two springs, two walls in 2D (eq. positions only): spontaneous symmetry breaking.

Exercices 3			
★	★★	★★★	★★★★
1	2,3,5,6,7,8,9,10	4,11	Nothing

C. Questionnaire pour les cours de théorie

Pour chaque question, merci d'entourer le chiffre qui convient le mieux

1. Le cours était utile.

Pas du tout d'accord	1	2	3	4	5	6	Tout à fait d'accord
----------------------	---	---	---	---	---	---	----------------------

2. Je ne sais pas à quoi sert ce cours.

Pas du tout d'accord	1	2	3	4	5	6	Tout à fait d'accord
----------------------	---	---	---	---	---	---	----------------------

3. Ce qui a été abordé dans ce cours me sera utile plus tard.

Pas du tout d'accord	1	2	3	4	5	6	Tout à fait d'accord
----------------------	---	---	---	---	---	---	----------------------

4. Ce cours était à ma portée.

Pas du tout d'accord	1	2	3	4	5	6	Tout à fait d'accord
----------------------	---	---	---	---	---	---	----------------------

5. J'ai trouvé ce cours difficile à suivre.

Pas du tout d'accord	1	2	3	4	5	6	Tout à fait d'accord
----------------------	---	---	---	---	---	---	----------------------

6. Ce cours était ennuyeux.

Pas du tout d'accord	1	2	3	4	5	6	Tout à fait d'accord
----------------------	---	---	---	---	---	---	----------------------

7. Je suis resté·e très concentré·e durant ce cours.

Pas du tout d'accord	1	2	3	4	5	6	Tout à fait d'accord
----------------------	---	---	---	---	---	---	----------------------

8. J'ai été souvent distrait·e durant ce cours.

Pas du tout d'accord	1	2	3	4	5	6	Tout à fait d'accord
----------------------	---	---	---	---	---	---	----------------------

9. J'ai maintenu une grande attention durant cette activité.

Pas du tout d'accord	1	2	3	4	5	6	Tout à fait d'accord
----------------------	---	---	---	---	---	---	----------------------

10. Pour moi, ce cours était facile.

Pas du tout d'accord	1	2	3	4	5	6	Tout à fait d'accord
----------------------	---	---	---	---	---	---	----------------------

11. J'ai eu du plaisir à suivre ce cours.

Pas du tout d'accord	1	2	3	4	5	6	Tout à fait d'accord
----------------------	---	---	---	---	---	---	----------------------

12. Je ne peux rien retirer d'intéressant pour moi après ce cours.

Pas du tout d'accord	1	2	3	4	5	6	Tout à fait d'accord
----------------------	---	---	---	---	---	---	----------------------

13. Ce cours m'a permis de m'épanouir.

Pas du tout d'accord	1	2	3	4	5	6	Tout à fait d'accord
----------------------	---	---	---	---	---	---	----------------------

14. J'ai une bonne conscience de ce qui s'est passé durant le cours.

Pas du tout d'accord	1	2	3	4	5	6	Tout à fait d'accord
----------------------	---	---	---	---	---	---	----------------------

15. Difficile d'avoir un souvenir de ce qui s'est passé durant le cours.

Pas du tout d'accord	1	2	3	4	5	6	Tout à fait d'accord
----------------------	---	---	---	---	---	---	----------------------

16. J'ai en mémoire les moments clés du cours.

Pas du tout d'accord	1	2	3	4	5	6	Tout à fait d'accord
----------------------	---	---	---	---	---	---	----------------------

17. Les compétences mobilisées dans ce cours pourraient facilement être utilisées dans un autre contexte.

Pas du tout d'accord	1	2	3	4	5	6	Tout à fait d'accord
----------------------	---	---	---	---	---	---	----------------------

18. J'ai apprécié le cours d'aujourd'hui.

Pas du tout d'accord	1	2	3	4	5	6	Tout à fait d'accord
----------------------	---	---	---	---	---	---	----------------------

19. Il sera difficile de transférer dans un autre contexte les capacités mobilisées dans ce cours.

Pas du tout d'accord	1	2	3	4	5	6	Tout à fait d'accord
----------------------	---	---	---	---	---	---	----------------------

20. Les capacités utilisées dans ce domaine peuvent être utilisées ailleurs.

Pas du tout d'accord	1	2	3	4	5	6	Tout à fait d'accord
----------------------	---	---	---	---	---	---	----------------------

21. Quel âge avez-vous?

<18 | 18-25 | 26-35 | 36-40 | 40-50 | >50

22. Quel est votre genre?

Homme | Femme | Autre | Je ne veux pas le dire

23. Quel est votre profil linguistique?

D. Questionnaire pour les sessions interactives

Pour chaque question, merci d'entourer le chiffre qui convient le mieux

1. Je ne vois pas à quoi sert cette activité

Pas du tout d'accord	1	2	3	4	5	6	Tout à fait d'accord
----------------------	---	---	---	---	---	---	----------------------

2. Ce que j'ai fait durant cette activité me sera utile plus tard

Pas du tout d'accord	1	2	3	4	5	6	Tout à fait d'accord
----------------------	---	---	---	---	---	---	----------------------

3. Cette activité était réalisable pour moi et à ma portée.

Pas du tout d'accord	1	2	3	4	5	6	Tout à fait d'accord
----------------------	---	---	---	---	---	---	----------------------

4. J'ai trouvé cette activité difficile à faire.

Pas du tout d'accord	1	2	3	4	5	6	Tout à fait d'accord
----------------------	---	---	---	---	---	---	----------------------

5. J'ai eu du plaisir à faire cette activité.

Pas du tout d'accord	1	2	3	4	5	6	Tout à fait d'accord
----------------------	---	---	---	---	---	---	----------------------

6. Cette activité était ennuyeuse.

Pas du tout d'accord	1	2	3	4	5	6	Tout à fait d'accord
----------------------	---	---	---	---	---	---	----------------------

7. Je me sentais détendu-e pour réaliser cette activité.

Pas du tout d'accord	1	2	3	4	5	6	Tout à fait d'accord
----------------------	---	---	---	---	---	---	----------------------

8. Cette activité m'a angoissé-e.

Pas du tout d'accord	1	2	3	4	5	6	Tout à fait d'accord
----------------------	---	---	---	---	---	---	----------------------

9. Je ne suis pas content-e de mon travail durant cette activité.

Pas du tout d'accord	1	2	3	4	5	6	Tout à fait d'accord
----------------------	---	---	---	---	---	---	----------------------

10. Je suis content-e de ce que j'ai fait durant cette activité.

Pas du tout d'accord	1	2	3	4	5	6	Tout à fait d'accord
----------------------	---	---	---	---	---	---	----------------------

11. Je n'avais pas envie de faire cette activité.

Pas du tout d'accord	1	2	3	4	5	6	Tout à fait d'accord
----------------------	---	---	---	---	---	---	----------------------

12. Je me suis engagé-e pour bien réussir cette activité.

Pas du tout d'accord	1	2	3	4	5	6	Tout à fait d'accord
----------------------	---	---	---	---	---	---	----------------------

13. J'ai été souvent distrait-e durant cette activité.

Pas du tout d'accord	1	2	3	4	5	6	Tout à fait d'accord
----------------------	---	---	---	---	---	---	----------------------

14. J'ai maintenu une grande attention durant cette activité.

Pas du tout d'accord	1	2	3	4	5	6	Tout à fait d'accord
----------------------	---	---	---	---	---	---	----------------------

15. J'ai pu réaliser cette activité dans de bonnes conditions.

Pas du tout d'accord	1	2	3	4	5	6	Tout à fait d'accord
----------------------	---	---	---	---	---	---	----------------------

16. J'ai eu assez de temps et de ressources pour cette activité.

Pas du tout d'accord	1	2	3	4	5	6	Tout à fait d'accord
----------------------	---	---	---	---	---	---	----------------------

17. Je m'attendais à être plus soutenu-e dans cette activité.

Pas du tout d'accord	1	2	3	4	5	6	Tout à fait d'accord
----------------------	---	---	---	---	---	---	----------------------

18. L'assistance proposée était adéquate.

Pas du tout d'accord	1	2	3	4	5	6	Tout à fait d'accord
----------------------	---	---	---	---	---	---	----------------------

19. Le travail m'a apporté beaucoup sur le plan personnel.

Pas du tout d'accord	1	2	3	4	5	6	Tout à fait d'accord
----------------------	---	---	---	---	---	---	----------------------

20. Je ne peux rien retirer d'intéressant pour moi avec ce travail.

Pas du tout d'accord	1	2	3	4	5	6	Tout à fait d'accord
----------------------	---	---	---	---	---	---	----------------------

21. Le groupe de travail a bien fonctionné.

Pas du tout d'accord	1	2	3	4	5	6	Tout à fait d'accord
----------------------	---	---	---	---	---	---	----------------------

22. C'était difficile de travailler dans ce groupe.

Pas du tout d'accord	1	2	3	4	5	6	Tout à fait d'accord
----------------------	---	---	---	---	---	---	----------------------

23. Les échanges dans le groupe étaient respectueux.

Pas du tout d'accord	1	2	3	4	5	6	Tout à fait d'accord
----------------------	---	---	---	---	---	---	----------------------

24. Les échanges dans le groupe ont été fructueux.

Pas du tout d'accord	1	2	3	4	5	6	Tout à fait d'accord
----------------------	---	---	---	---	---	---	----------------------

25. Les membres de groupe ne m'ont rien apporté.

Pas du tout d'accord	1	2	3	4	5	6	Tout à fait d'accord
----------------------	---	---	---	---	---	---	----------------------

26. Le travail du groupe a permis de faire du bon travail.

Pas du tout d'accord	1	2	3	4	5	6	Tout à fait d'accord
----------------------	---	---	---	---	---	---	----------------------

27. Quel âge avez-vous?

<18 | 18-25 | 26-35 | 36-40 | 40-50 | >50

28. Quel est votre genre?

Homme | Femme | Autre | Je ne veux pas le dire

29. Quel est votre profil linguistique

Français | Allemand | Bilingue All-Fra | Anglais | Autre

E. Quizzes des sessions interactives

@home, QCM n°1

A faire pour le 19.09.2024. Une seule réponse juste par question. **Important: Merci d'entrer vos réponses sur Moodle.** La résolution de ce QCM ne devrait pas prendre plus de 10 min.

1.1 Vecteurs/Vektoren/Vectors Français: Soit deux vecteurs $\vec{u} = (1, 0, 3)^t$ et $\vec{v} = (4, 6, 0)^t$. $\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}$ vaut

Allemand: Es seien zwei Vektoren $\vec{u} = (1, 0, 3)^t$ und $\vec{v} = (4, 6, 0)^t$. $\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}$ gleicht

Anglais: Let us consider two vectors $\vec{u} = (1, 0, 3)^t$ and $\vec{v} = (4, 6, 0)^t$. $\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}$ is equal to

- 2
- $(-1, 3, 3)^t$
- $(-1, 3, -3)^t$
- $(-1, -3, 3)^t$
- $\sqrt{19}$

1.1 Produit scalaire Parmi ces propriétés du produit scalaire, laquelle n'est pas valide?

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- $\vec{u} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{u} \cdot \vec{a} - \vec{u} \cdot \vec{b}$
- $\vec{u} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{u} \cdot \vec{a} + \vec{u} \cdot \vec{b}$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ si \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux

1.3 Produit vectoriel: Soit deux vecteurs $\vec{u} = (1, 0, 3)^t$ et $\vec{v} = (4, 6, 0)^t$. La valeur de $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$ est:

- $(-18, 12, 6)^t$
- $6\sqrt{14}$
- $(18, -12, -6)^t$
- 7π
- $4\sqrt{14}$

1.4 Produit mixte Soit un parallélogramme défini par $\vec{a} = (3, 0, -2)^t$, $\vec{b} = (0, 2, 5)^t$ et $\vec{c} = (1, -1, 2)^t$. Quel est son volume?

1. 31
2. 30
3. 32
4. 10π
5. 15

1.5 Bases Parmi les triades de vecteurs données ci-dessous, laquelle est une base?

1. $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)^t$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)^t$ et $\vec{e}_3 = (1, 1, 0)^t$
2. $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)^t$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)^t$ et $\vec{e}_3 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)^t$
3. $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)^t$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 1)^t$ et $\vec{e}_3 = (1, 1, 1)^t$
4. $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)^t$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)^t$ et $\vec{e}_3 = (1, 0, 1)^t$
5. $\vec{e}_1 = (1, 2, 3)^t$, $\vec{e}_2 = (2, 4, 6)^t$ et $\vec{e}_3 = (1/2, 1, 3/2)^t$

1.6 Coordonnées polaires Considérons l'équation d'une courbe cardioïde $r = a(1 + \cos \varphi)$, donnée en coordonnées polaires. Quel est l'équation cartésienne équivalente?

1. $(x^2 + y^2 + ax)^2 = a^2(x^2 + y^2)$
2. $(x^2 - y^2 + ax)^2 = a^2(x^2 - y^2)$
3. $(x^2 - y^2 + ax)^2 = a^2(x^2 + y^2)$
4. $(x^2 - y^2 - ax)^2 = a^2(x^2 - y^2)$
5. $(x^2 + y^2 - ax)^2 = a^2(x^2 + y^2)$

1.7 Question réflexive Écrivez au minimum 4 phrases sur votre ressenti après cette session @home et le cours en général. Vous pouvez par exemple décrire ce que vous avez appris, ce que vous n'avez pas appris, ce que vous saviez déjà, quels sont les défis qui vous attendent avec ce chapitre ou les difficultés que vous avez rencontrées. Ce que vous écrivez restera confidentiel. Il s'agit juste d'un moyen pour vous de faire le point sur votre apprentissage et pour nous d'avoir un feedback sur le ressenti des étudiants et étudiantes. Chaque réponse sera lue et commentée via message privé de manière bienveillante par les enseignants.

@home, Quiz n°2

A faire pour le 26.09.2024. Une seule réponse juste par question. **Important:** Merci d'entrer vos réponses sur Moodle. La résolution de ce QCM ne devrait pas prendre plus de 10 min.

2.1 Propriétés des dérivées Parmi les propriétés suivantes, laquelle n'est pas valable

1. $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) * f'(x)$
2. $(g \cdot f)'(x) = f'(x)g(x) - f(x)g'(x)$
3. $(x^n)' = nx^{n-1}$
4. $(\frac{f}{g})'(x) = (f'(x)g(x) - f(x)g'(x))/g^2(x)$
5. $f(x) = cst \rightarrow f'(x) = 0$

2.2 Dérivée, question 1 Soit $f(x) = 1/(x + x^2)$. Que vaut $f'(x)$?

1. $1/(x + x^2)^2$
2. $(1 + 2x)/(x + x^2)^2$
3. $-1/(x + x^2)^2$
4. $(1 + 2x^2)/(x + x^2)^2$
5. $-(1 + 2x)/(x + x^2)^2$

2.3 Dérivée, question 2 Soit $f(x) = (e^{3x} + 1)/(x + 1)$. Que vaut $f'(x)$?

1. $(e^{3x}(3x + 2) - 1)/(x + 1)^2$
2. $(e^{3x}(3 - 2) - 1)/(x + 1)^2$
3. $(e^{3x}(3x + 2) + 1)/(x + 1)$
4. $(e^{3x}(3x + 2) + 1)/(x + 1)^2$
5. $(e^{3x}(3x - 2) + 1)/(x + 1)$

2.4 Accélération Soit un vecteur position donné par $\vec{r}(t) = (\cos(t), \sin(2t), 4)^t$, quelle est l'accélération associée?

1. $\vec{a}(t) = (-\cos(t), -\sin(2t), 0)^t$
2. $\vec{a}(t) = (\sin(t), -2\cos(2t), 0)^t$
3. $\vec{a}(t) = (-\cos(t), -4\sin(2t), 4)^t$
4. $\vec{a}(t) = (-\sin(t), 2\cos(2t), 0)$
5. $\vec{a}(t) = (-\cos(t), -4\sin(2t), 0)^t$

2.5 Vitesse La vitesse d'une voiture roulant en ligne droite est donnée par $v(t) = 3t + 5$. Quelle distance a-t-elle parcourue entre $t_1 = 2$ et $t_2 = 15$?

1. $793/3$
2. $795/2$
3. $793/2$
4. $791/2$
5. $800/3$

2.6 Question reflexive Ecrivez au minimum 4 phrases sur votre ressenti après cette session @home et le cours en général. Vous pouvez par exemple décrire ce que vous avez appris, ce que vous n'avez pas appris, ce que vous saviez déjà, quels sont les challenge qui vous attendent avec ce chapitre ou les difficultés que vous avez rencontrées. Ce que vous écrivez restera confidentiel. Il s'agit juste d'un moyen pour vous de faire le point sur votre apprentissage et pour nous d'avoir un feedback sur le ressenti des étudiants et étudiantes. Chaque réponse sera lue et commentée via message privé de manière bienveillante par les enseignants.

@home, Quizz n°3

A faire pour le 03.10.2024. Une seule réponse juste par question. **Important:** **Merci d'entrer vos réponses sur Moodle.** La résolution de ce QCM ne devrait pas prendre plus de 10 min.

3.1 Loi de Newton Parmi ces affirmations sur la loi de Newton: Laquelle n'est pas valide.

1. La loi de Newton peut être une équation différentielle linéaire.
2. La loi de Newton s'écrit comme suit: $\vec{F} = m\vec{a}$
3. La loi de Newton est une équation différentielle du premier ordre.
4. La loi de Newton peut aussi s'écrire $\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$
5. La loi de Newton peut aussi s'écrire $\vec{F} = m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2}$

3.2 Vol parabolique 1 Considérons un objet de masse m qui est lancé depuis le sol avec une vitesse initiale de norme v_0 et formant un angle θ avec le sol. A quelle distance horizontale d (portée) l'objet va-t-il retomber sur le sol? N.b. On notera l'accélération gravitationnelle terrestre comme étant g .

1. $d = \frac{v^2}{g} \sin 2\theta$
2. $d = \frac{v}{g} \sin 2\theta$
3. $d = \frac{v^2}{g} \cos 2\theta$
4. $d = \frac{v}{g} \cos 2\theta$
5. $d = \frac{-v^2}{g} \cos 2\theta$

3.3 Vol parabolique 2 Quel est l'angle pour lequel la portée d est maximale?

1. π
2. $\pi/3$
3. $-\pi/2$
4. $\pi/2$
5. $\pi/4$

3.4 Vol parabolique 3 Quelle est la hauteur maximale h que va atteindre l'objet?

1. $h = \frac{1}{2g}v^2 \sin^2 \theta$

2. $h = \frac{1}{2g}v^2 \sin^2 2\theta$

3. $h = \frac{1}{2g}v^2 \cos^2 2\theta$

4. $h = \frac{1}{2g}v^2 \cos^2 \theta$

5. $h = \frac{-1}{2g}v^2 \sin^2 \theta$

3.5 Question reflexive Ecrivez au minimum 4 phrases sur votre ressenti après cette session @home et le cours en général. Vous pouvez par exemple décrire ce que vous avez appris, ce que vous n'avez pas appris, ce que vous saviez déjà, quels sont les challenge qui vous attendent avec ce chapitre ou les difficultés que vous avez rencontrées. Ce que vous écrivez restera confidentiel. Il s'agit juste d'un moyen pour vous de faire le point sur votre apprentissage et pour nous d'avoir un feedback sur le ressenti des étudiants et étudiantes. Chaque réponse sera lue et commentée via message privé de manière bienveillante par les enseignants.

@home, Quizz n°4

A faire pour le 10.10.2024. Une seule réponse juste par question. **Important:** Merci d'entrer vos réponses sur Moodle. La résolution de ce QCM ne devrait pas prendre plus de 10 min.

4.1 Puissances de i Que vaut i^{138} ?

- 1
- 1
- i
- $-i$
- $1 + i$

4.2 Formule d'Euler: Que vaut $e^{i\pi}$?

- 1
- 1
- i
- $-i$
- $1 + i$

4.3 Forme exponentielle 1: Quelle expression est équivalente à $re^{i\phi}$?

- $r \cos \phi - ir \sin \phi$
- $ir \cos \phi + r \sin \phi$
- $ir \cos \phi - ir \sin \phi$
- $\frac{1}{2}r \cos \phi + \frac{i}{2}r \sin \phi$
- $r \cos \phi + ir \sin \phi$

4.4 Forme exponentielle 2: Que vaut $e^{i\pi/3} + e^{-i\pi/3}$?

- 2
- 1/2
- $\sqrt{3}/2$
- 1
- 3/2

4.5 Forme exponentielle 3: Que vaut $5\sqrt{2} + i(5\sqrt{2})$?

1. $10e^{i\pi/2}$
2. $10e^{i\pi/4}$
3. $10e^{-i\pi/4}$
4. $10e^{-i\pi/2}$
5. $5e^{i\pi/2}$

4.6 Dérivée complexe Selon vous, quelle est la dérivée de la fonction complexe $f(z) = \ln z$?

1. $-1/z$
2. $-1/z^2$
3. $1/z$
4. $2/z$
5. $z \ln z$

4.7 Question reflexive Ecrivez au minimum 4 phrases sur votre ressenti après cette session @home et le cours en général. Vous pouvez par exemple décrire ce que vous avez appris, ce que vous n'avez pas appris, ce que vous saviez déjà, quels sont les challenge qui vous attendent avec ce chapitre ou les difficultés que vous avez rencontrées. Ce que vous écrivez restera confidentiel. Il s'agit juste d'un moyen pour vous de faire le point sur votre apprentissage et pour nous d'avoir un feedback sur le ressenti des étudiants et étudiantes. Chaque réponse sera lue et commentée via message privé de manière bienveillante par les enseignants.

F. Séries d'exercices

Exercises Chapter 1: Vectors and coordinate systems

- Consider the projector operator onto a vector \vec{u} \mathbb{P}_u . Proof that
 - $\mathbb{P}_u^2 = \mathbb{P}_u$, i.e. the application of the operator twice is the same as applying it once for any vector \vec{v}
 - $\mathbb{P}_u \mathbb{P}_{u^\perp} = \mathbb{P}_{u^\perp} \mathbb{P}_u = 0$, i.e. the successive application of the projector onto \vec{u} and onto the space perpendicular to \vec{u} always gives the zero vector.
- Consider a rotation of angle θ in two dimensions, and the matrix associated to this rotation R_θ . Consider also the projector operator onto the vector along the X axis P_x . Calculate $P_x R_\theta$ and $R_\theta P_x$. Are there products different?, why?.
- Proof that $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$
- Proof that the volume given by the parallelepiped defined by the vectors \vec{u} , \vec{v} , and \vec{w} is $vol = |(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}|$
- Consider the vectors $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ and $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$
 - Calculate the area of the parallelogram given by \vec{u}_1 and \vec{u}_2 (Hint, extend the vectors to three dimensions and consider the vector product)
 - Calculate the angle formed by the two vectors \vec{u}_1 and \vec{u}_2
 - Calculate the norm of \vec{u}_1 and \vec{u}_2 and create the normalized vectors $\vec{v}_1 \equiv \vec{u}_1/|\vec{u}_1|$ and $\vec{v}_2 \equiv \vec{u}_2/|\vec{u}_2|$
 - Determine the rotation matrix that transform \vec{v}_1 into \vec{v}_2
 - We consider a coordinate systems with basis vectors $\vec{e}_1 = \vec{v}_1$ and another vector of unit length $\vec{e}_2 \perp \vec{e}_1$ and unit length. Determine \vec{e}_2 as the projection of \vec{v}_2 in the space perpendicular to \vec{e}_1 . Please give the corresponding projection matrix and check the result.
 - Consider the extension to three dimensions by adding a third coordinate and create another unitary vector \vec{e}_3 perpendicular to \vec{e}_1 and \vec{e}_2
- A Face Centered Cubic (FCC) lattice is an infinite collection of points in space which is periodic. The collection of points is generated by linear combinations with integer coefficients of the, so called, primitive vectors of the lattice \vec{a}_i with $i = 1, 2, 3$. Explicitly,

$$\vec{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{a}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

i.e. any vector $\vec{R}_{l,m,n} = l\vec{a}_1 + m\vec{a}_2 + n\vec{a}_3$ with integers l, m, n is a point of the FCC lattice.

- Calculate $|\vec{R}_{l,m,n}|^2$ for any combination of the indices l, m, n
- The origin of coordinates $\vec{R}_{0,0,0}$ is a valid point of the lattice. Calculate the minimum distance at which we find points of the FCC lattice to the origin. This is the so called first neighbors distance.
- How many first neighbors can we find at the minimum distance? what are their corresponding indices l, m, n ?

- (d) Calculate the volume of the parallelepiped generated by the three vectors \vec{a}_i .
- (e) (**Hard!**). If we place a sphere of radius $1/2$ centered on each point of the FCC lattice, show that the fraction of volume occupied by the spheres is $\pi / (3\sqrt{2}) \simeq 0.74$.
Hint: consider the fractions of the spheres that lie inside the parallelepiped.
Note: this is a classical problem in condensed matter physics, well beyond the scope of this course.
7. Given $\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$,
- What is the norm of each vector?
 - What is the angle between the two vectors?
 - Find a normalized (to unit length) vector \vec{v}_3 such that $\vec{v}_3 \perp \vec{v}_1$ and $\vec{v}_3 \perp \vec{v}_2$. Is this vector unique?
8. Consider the point \vec{r} with cylindrical coordinates $(2, \frac{\pi}{2}, 3)$
- Write the same point in Cartesian coordinates
 - Write the same point in spherical coordinates
9. The Cartesian coordinates of a point \vec{r} are $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Find its cylindrical and spherical coordinates.
10. A point is rotating counterclockwise (as seen from the positive Z-axis) along a circle in the plane X-Y or radius $r = 1m$. The speed of the point is $3m/s$. At time $t = 1s$, the point is at the position (in the X,Y plane) $\vec{r}(t = 1s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1m \end{pmatrix}$.
- Give a formula describing the movement of the point in polar coordinates
 - Transform the previous to Cartesian coordinates.

Exercises Chapter 2: Kinematics of a point mass

1. Velocity and acceleration in Cylindrical coordinates. Basis vectors.

- (a) Compute the time derivative of the vector $\vec{r} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z$ and get the linear combination

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\phi} \vec{e}_\varphi + \dot{z} \vec{e}_z$$

of the basis vectors

$$\vec{e}_\rho = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- (b) Compute the acceleration vector

Solution: $\ddot{\vec{r}} = [\ddot{\rho} - \rho(\dot{\phi})^2] \vec{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi}) \vec{e}_\varphi + \ddot{z} \vec{e}_z$

- (c) Consider rotations about the z axis in the plane X-Y at constant radius r and constant angular velocity $\omega \equiv \dot{\phi}$. Show that the vector $\vec{\omega} \equiv \omega \vec{e}_z$ verifies

$$\dot{\vec{r}} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

- (d) Verify that $\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{\omega}$.

- (e) Verify that the acceleration in the previous case is

$$\vec{a} = -r\omega^2 \vec{e}_\rho = -\frac{v^2}{r} \vec{e}_\rho, \text{ where}$$

v is the velocity of the point around the circle.

2. Spherical coordinates. Basis vectors

- (a) Compute the time derivative of the vector $\vec{r} = r \vec{e}_r$ and get the linear combination

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\vartheta} \vec{e}_\vartheta + r \sin \vartheta \dot{\phi} \vec{e}_\varphi$$

of the basis vectors

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} \quad \vec{e}_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta \sin \varphi \\ -\sin \vartheta \end{pmatrix} \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

- (b) Show that the vectors $\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi$ are linearly independent.

- (c) Verify the orthogonality $(\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\vartheta) = 0$, $(\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\varphi) = 0$, $(\vec{e}_\vartheta \cdot \vec{e}_\varphi) = 0$ and the normalization $|\vec{e}_r| = 1$, $|\vec{e}_\vartheta| = 1$, $|\vec{e}_\varphi| = 1$.

3. Unitary vectors tangential and perpendicular to a trajectory

Consider the trajectory $\vec{r}(t)$ followed by a point

- (a) Consider the total differential of the trajectory. What is the (differential) distance, call it ds , traveled by the point during a “differential time” dt ?
- (b) Can you write a general expression of the total distance $s(t)$ traveled by the point between times $t_0 = 0$ and t ?
- (c) Consider a unit vector $\vec{\sigma}$ (i.e. $|\vec{\sigma}| = 1$) tangential to the trajectory in the direction of the velocity. Can you write it?
- (d) Calculate $\frac{d\vec{r}}{ds}$. What is its relation to $\vec{\sigma}$?
- (e) Deduce the orthogonality relation $\vec{\sigma} \cdot \frac{d\vec{\sigma}}{ds} = 0$
- (f) Show that the acceleration vector can be written in terms of tangential and normal components

$$\ddot{\vec{r}} = \dot{v}\vec{\sigma} + \kappa v^2 \vec{n}$$

where $v = \dot{s}(t)$ is the velocity (do you know why??), $\kappa = |d^2\vec{r}/ds^2|$ the curvature, and $1/\kappa$ the radius of curvature. The unit vector $\vec{n} \parallel d\vec{\sigma}/ds$ is normal to the trajectory.

Hint : use the chain rule

4. Total differential of a multivariable function

Compute the total differential $df = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} f dx_i$ of the following expressions:

- (a) Function $f(x, y, z) = V(|\vec{r} - \vec{R}|)$
where $|\vec{r} - \vec{R}| = \left[(x - R_x)^2 + (y - R_y)^2 + (z - R_z)^2 \right]^{1/2}$
- (b) Coordinate transformation $\vec{r} = \vec{r}(\varrho, \varphi, z)$ given by

$$\begin{aligned}x &= \varrho \cos \varphi \\y &= \varrho \sin \varphi \\z &= z\end{aligned}$$

- (c) Quadratic form $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n c_{ij} x_i x_j$

5. Gradient

Show that, for any differentiable function $f(x, y)$, the direction for which the function changes the most abruptly is given by the gradient $\nabla f(x, y)$.

6. **Description of a trajectory**

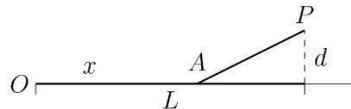
A hot air balloon of initial position $\vec{r}(0) = 0$ and velocity $\dot{\vec{r}}(0) = 0$ starts to move a constant vertical ascending velocity $\vec{v}_a = v_0\vec{e}_z$. Moreover, the wind exerts on it a lateral velocity $\vec{v}_l = (\alpha z)\vec{e}_x$. The constants v_0 and α are given.

- Write the velocity $\dot{\vec{r}}$. Deduce the position vector \vec{r} and the acceleration $\ddot{\vec{r}}$ (as an explicit function of time).
- Compute the unit vector $\vec{\sigma} = \vec{v}/v$ tangent to the trajectory as well as the normal unit vector \vec{n} such that $\vec{n} \cdot \vec{\sigma} = 0$.
- Deduce the tangential acceleration a_t and the normal acceleration a_n .

Solution. $\vec{r}(t) = (\alpha v_0/2)t^2\vec{e}_x + v_0t\vec{e}_z$
 $\vec{n} = (1/\sqrt{1 + \alpha^2 t^2})(\vec{e}_x - \alpha t\vec{e}_z)$

7. **Optimization of a trajectory**

According to the figure, a car driver travels, at constant velocity v , along a highway of length L . He has to go to a city P located at a distance d perpendicular to the last highway exit. In order to win time, it is possible to leave the highway earlier at the point A , but the speed must be reduced by a factor α .



- Write the two position vectors \vec{r}_A and \vec{r}_P . Compute the norm of the vector $\vec{r}_P - \vec{r}_A$.
- Determine the position of the point A from where it is possible to reach P in a minimum time.

Solution. Position of the point A : $x = L - \alpha d/\sqrt{1 - \alpha^2}$

EXERCISES CHAPTER 3: DYNAMICS OF A POINT MASS

1. Limit of zero drag for the projectile motion

The trajectory of a projectile of mass m in a viscous medium with drag coefficient α is given by

$$x(t) = x_0 + v_{0x} \frac{m}{\alpha} (1 - e^{-\frac{\alpha}{m}t})$$

$$y(t) = y_0 + \left(v_{0y} - g \frac{m}{\alpha}\right) t + g \left(\frac{m}{\alpha}\right)^2 (1 - e^{-\frac{\alpha}{m}t})$$

Considering the Taylor expansion of the exponential function, take the limit $\alpha \rightarrow 0$ in the previous expressions and show that the limit is exactly the same as the trajectory found when we solve the equations of motion without drag.

2. Plane Pendulum, small amplitude oscillations

As explained in the class notes, a good approximation for the dynamics of a pendulum of length ℓ moving with small angles $\varphi(t)$ is given by the equation of motion $\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell}\varphi = 0$. In this exercise we propose an ansatz $\varphi_1(t) = \sin \omega t$.

- Check if there is any angular frequency ω such that the proposed ansatz solves the equation of motion. There's no need to consider initial conditions at this stage.
- Try to propose another function $\varphi_2(t)$ that may also solve the equation.
- Prove that any linear combination $\varphi(t) = a \cdot \varphi_1(t) + b \cdot \varphi_2(t)$ is also a solution of the equation of motion.
- Considering the initial conditions $\varphi(0) = \varphi_0$ and $\dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0$, find the values of the constants a and b .
- From the class notes, obtain the tension T of the rod of the pendulum.
- (Hard!) we add viscous friction to the pendulum in the form of a term proportional to the velocity of the pendulum, the resulting equation of motion is $\ddot{\varphi} + \frac{\alpha}{m}\dot{\varphi} + \frac{g}{\ell}\varphi = 0$. Can you propose an ansatz to solve this equation?

3. Plane pendulum: exact solution (Hard!)

- Find the integral expression of the solution of the nonlinear differential equation of the plane pendulum $\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin \varphi = 0$, with initial conditions $\varphi(0) = \varphi_0$ and $\dot{\varphi}(0) = 0$.
Hint : multiply the equation by $\dot{\varphi}$ and reduce each term to a single time derivative.
Solution: $\omega t = \int_{\varphi_0}^{\varphi(t)} \frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos \varphi - \cos \varphi_0)}}$
- Express the integral when both $\varphi, \varphi_0 \ll 1$ by using the smallest (non-null) term in the Taylor series expansion of $\cos(\varphi)$ and $\cos(\varphi_0)$.
- Find an explicit integral solution in the previous case, and verify that corresponds to the limit of small angle oscillations as discussed in the course.
Hint: $\frac{d \sin^{-1}(x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- (harder!) Thinking about part a, you found a conservation law: There's a quantity that is constant over time. Can you give a physical meaning to this conserved quantity? (this subject will be covered later in the course).

4. Bead Sliding along a Rotating Rod

A bead of mass m slides without friction along a rod rotating with constant angular velocity ω in space (no gravity!). The equation of motion is $m\vec{\ddot{r}} = \vec{R}$, where \vec{R} is the force exerted by the rod onto the bead. Since there is no friction, this force is perpendicular to the rod at any given instant as shown in the figure (recall the rod is rotating at constant speed!).

- write the equations of motion in polar coordinates
- Consider the equation for the radial component and solve it using the ansatz $\varrho(t) = e^{\lambda t}$, is there any λ (perhaps two!) for which we can find a solution?. Could a general solution to that equation be a linear superposition of two functions? (with coefficients to be determined by the initial conditions).
- Consider the equation of motion for the angular component, determine the force R acting on the bead.

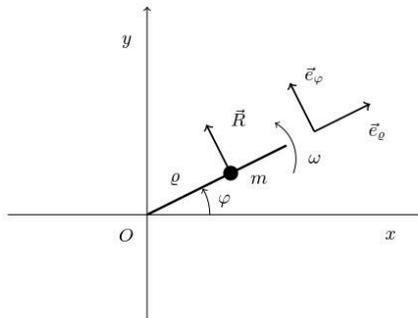


Figure 1. Bead sliding along a rotating rod with constant angular velocity ω

5. Conics

A point particle moves in the xy plane with the velocity

$$\vec{v} = \alpha \vec{e}_\varphi + \beta \vec{e}_y$$

where α and β are given constants. Determine the trajectory $\varrho(\varphi)$ when $\varrho(0) = \varrho_0$.

Hint: write \vec{e}_y as linear combination of \vec{e}_ϱ , \vec{e}_φ . Then express $\frac{d\varrho}{dt} = \frac{d\varrho}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt}$ (chain rule), substitute in the equations and solve the differential equation for $\varrho(\varphi)$ by direct integration

Solution: $\varrho(\varphi) = \frac{\varrho_0}{\alpha} \frac{1}{1 + \frac{\beta}{\alpha} \cos \varphi}$ (equation of conics)

6. Taylor series expansion of functions

- Calculate the coefficients of the Taylor series expansion of $\cos(x)$ (There are notes in Moodle for that actually!). Consider that x is in radians. What would happen if x is measured in degree?
- Calculate the coefficients of the Taylor series expansion of $\sin(x)$. (By default we consider that x is in radians).
- Calculate the Taylor series expansion of an exponential function with real argument e^{ax} .
- Why the statement "the friction force of an object moving through a fluid is $\vec{f} = -a\vec{v}$ with $a \in \mathbb{R}^+$ for sufficiently small speed" is reasonable and quite general?
- Why the statement "When an object lies at a stable equilibrium position and its position is slightly perturbed, it is likely that the subsequent movement will be oscillatory" (like for the pendulum) is reasonable.

EXERCISES CHAPTER 3: DYNAMICS OF A POINT MASS (SECOND PART)

1. **Underdamped regime by direct substitution of exponential-sinusoidal ansatz**

Consider the equation of motion of a harmonic oscillator with a drag force (proportional to the speed), $\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ in the underdamped regime ($\omega_0 > \gamma/2$),

- Using the Ansatz $x_1(t) = e^{\lambda t} \cdot \sin(\Omega t)$, find the possible values of λ and Ω (both $\in \mathbb{R}$) such that $x_1(t)$ is a solution of the equations of motion by direct substitution, i.e. calculate the \dot{x}_1 and \ddot{x}_1 and substitute in the equations of motion to find λ and Ω .
- Same as in the previous point with the function $x_2(t) = e^{\lambda t} \cdot \cos(\Omega t)$, are the possible values of λ and Ω any different from the previous point?
- Do you think this method is easier than using complex exponentials?

2. **Critical damping as the limit of zero drag**

As discussed in the class, the general solution for the underdamped harmonic oscillator is given by

$$x_u(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} (a \cdot \cos(\Omega t) + b \cdot \sin(\Omega t))$$

with $\Omega \equiv \sqrt{\omega_0^2 - (\frac{\gamma}{2})^2}$ and under the assumption $\omega_0 > \gamma/2$.

For the overdamped harmonic oscillator we have a solution

$$x_o(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} (a \cdot \cosh(\alpha t) + b \cdot \sinh(\alpha t))$$

with $\alpha \equiv \sqrt{(\frac{\gamma}{2})^2 - \omega_0^2}$ and under the assumption $\gamma/2 > \omega_0$. The definition of the hyperbolic sine and cosine are

$$\cosh(x) = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x})$$

$$\sinh(x) = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x})$$

The general solution of the harmonic oscillator in critical damping ($\omega_0 = \gamma/2$) is $x_c(t) = (a + bt)e^{-\frac{\gamma}{2}t}$. (Please notice that the constants a and b mean "arbitrary constants" they don't need to have any particular value and, in general, these constants do not have the same value for each of the previous expressions for given initial conditions!)

- Taking the Taylor expansion to the lowest possible order in powers of Ωt , take the limit $\Omega \rightarrow 0^+$ (towards 0 but positive) in the expression of $x_u(t)$, recall that two independent solutions must be found and the solution zero is not an option.
Hint: the part $b \cdot \sin(\Omega t)$ can be written always as $\frac{c}{\Omega} \cdot \sin(\Omega t)$ since the constant a , b or c should be determined after considering the initial conditions, they are just names!
- Do the same as before but this time taking the limit $\alpha \rightarrow 0^+$ in the expression for $x_o(t)$. Same comment as in (a) applies here.
Hint, consider that $\cosh'(x) = \sinh(x)$ and $\sinh'(x) = \cosh(x)$ (notice there's no sign change here).
- Just for fun, show that $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$. At this stage, considering all we know about complex numbers, show also that $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

3. **Forced harmonic oscillator and resonances**

As explained in the class (and script), the particular solution for the forced harmonic oscillator with a cosine external force is the one that satisfies

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t)$$

and can be written as

$$x(t) = \text{Re}(Ae^{i\omega t})$$

with

$$A = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i(\gamma\omega)}$$

A can also be written as

$$A = X_0 e^{i\varphi_0}$$

with

$$X_0 = |A| = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}}$$

- (a) Show that the frequency ω_r (resonance frequency) at which the amplitude X_0 is maximum is given by $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/2}$.
Hint: The derivative of a function at the maximum is zero, so $\frac{dX_0}{d\omega} = 0$ when $\omega = \omega_r$.
- (b) Is there any value of the damping γ after which there is no resonance? (eg. the resonance frequency becomes imaginary)
- (c) Find the value of X_0 at the resonant frequency ω_r , X_r .
answer: $X_r = \frac{F_0/m}{\gamma\sqrt{\omega_0^2 - (\frac{\gamma}{2})^2}}$
- (d) A limit quite often found in physics is very small damping, $\gamma \ll \omega_0$. In this limit, show that the resonant frequency ω_r coincides with the natural frequency ω_0 , and show that the maximum amplitude is $X_r = \frac{F_0/m}{\gamma\omega_0}$
- (e) (Hard!) Show that the frequencies at which the amplitude is half the maximum differ by an amount $\Delta\omega \simeq \sqrt{3}\gamma$ (also known as bandwidth of the resonance). This quantity is called Full Width at Half Maximum or FWHM of the resonance and it is among the most used terms in physics!
- (f) From (e), show that the "quality factor" defined as $Q \equiv \frac{\omega_r}{\Delta\omega}$ is, in the very small damping regime, $Q \simeq \frac{\omega_0}{\sqrt{3}\gamma}$. The quality factor is a measure of the "quality" of an oscillator in terms of how sharp the resonance is. A "normal" spring-mass system can have $Q \simeq 100$ but atomic systems can have $Q \sim 10^{11}$ or even higher.
Hint: This part can be trivially done from the result of (d) and (e) even if you did not complete the corresponding demonstrations.

G. Scripts des trois premiers chapitres

Chapter 1

Vectors and Coordinate Systems

Classical mechanics is the branch of physics that studies the motion of the objects. Very often, the reality of the object of mass m can be idealized by a **point particle** or point mass represented by a geometrical point. The physical space, in which the object evolves, is described by the Euclidian space \mathbb{R}^3 and the kinematics is fixed by this geometry and the time t .

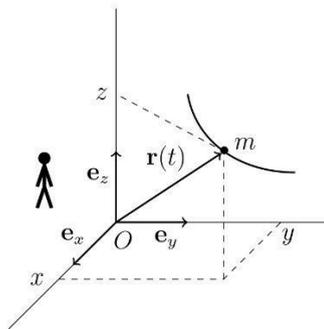


Figure 1.1: Frame of reference (observer) and coordinate system O

1.1 Position Vector

The motion of the point particle is described by a time-dependent function $\mathbf{r}(t)$ called **position vector**¹. This vector is defined with respect to a **frame of reference** in which the observer is at rest. As shown in FIG. 1.1, the observer follows the motion of the object m by means of a **coordinate system** defined by an origin O and three axes. These axes are represented by three **basis vectors**² written $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ and chosen orthonormal. It is to remark that, for a given frame of reference, there exists an infinity of possible coordinate systems, whereas to a given coordinate system corresponds only one frame of reference. For instance, the motion of a passenger on a train can be described by taking the train platform

¹In these notes, vectors are represented by boldface letters.

²A basis of the vector space \mathbb{R}^3 is a family of three linearly independent vectors that span the whole linear space. The vectors $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ are linearly independent if $\alpha\mathbf{e}_x + \beta\mathbf{e}_y + \gamma\mathbf{e}_z = 0$ implies $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

as frame of reference and by choosing any point on this platform as origin of the coordinate system. But also, the train can be taken as frame of reference and any point in the train chosen as origin of the coordinate system.

From FIG 1.1, we see that the position of m can be given by the arrow \mathbf{r} characterized by a direction and a magnitude. It can also be given by a set of three values (x, y, z) called **coordinates** or **components**. Both ways of describing the position of the point particle lead to the concept of vector space (see course in linear algebra) in which every vector can be written as linear combination of the basis vectors

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z. \quad (1.1)$$

For arrow vectors, this relation is obtained by multiplying the length of the arrows $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ by the numbers x, y, z and by adding them with the parallelogram rule. For the component vectors, the choice of the **standard basis**

$$\mathbf{e}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

leads, according to Eq. (1.1), to the **column vector**

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (1.3)$$

The **transpose vector** written \mathbf{r}^T corresponds to the **row vector**

$$\mathbf{r}^T = [x, y, z]. \quad (1.4)$$

1.2 Scalar Product

The **scalar product** of the arrow vectors \mathbf{u} and \mathbf{v} is the number defined by the expression

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = u v \cos \chi \quad (1.5)$$

where u, v are the lengths of the arrows and χ the angle between them. We deduce that the length or the **norm** u is given by

$$u \equiv |\mathbf{u}| = \sqrt{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})}. \quad (1.6)$$

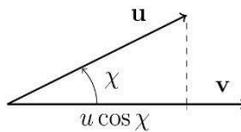


Figure 1.2: Scalar product

A **unit vector** \mathbf{e} is a vector of length

$$|\mathbf{e}| = 1.$$

Divided by its norm, a vector can always be normalized in order to give a unit vector usually written

$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{u}. \quad (1.7)$$

Two vectors \mathbf{u} and \mathbf{u}' are **orthogonal** if

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}') = 0.$$

The axes of the coordinate system have the orthonormality property

$$\begin{aligned} (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x) &= (\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_y) = (\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z) = 1 \\ (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_y) &= (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_z) = (\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_z) = 0. \end{aligned}$$

By using these orthonormality property and by considering the linear combination (1.1), we see that the coordinates are given by the scalar products

$$x = (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{r}) \quad y = (\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{r}) \quad z = (\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{r}). \quad (1.8)$$

The scalar product is distributive³

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}.$$

Then, with the linear combinations

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= u_x \mathbf{e}_x + u_y \mathbf{e}_y + u_z \mathbf{e}_z \\ \mathbf{v} &= v_x \mathbf{e}_x + v_y \mathbf{e}_y + v_z \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

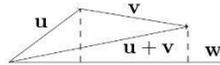
and by using the distributivity property as well as the orthonormality of $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$, it is possible to express the scalar product in components⁴

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) &= (u_x \mathbf{e}_x + u_y \mathbf{e}_y + u_z \mathbf{e}_z) \cdot (v_x \mathbf{e}_x + v_y \mathbf{e}_y + v_z \mathbf{e}_z) \\ &= u_x v_x (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x) + u_x v_y (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_y) + u_x v_z (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_z) + u_y v_x (\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_x) + \dots \\ &= u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z. \end{aligned}$$

The **row-column multiplication rule** that consists of multiplying the components of the row vector with the corresponding components of the column vector and summing, leads to the expression of the scalar product in components

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) &\equiv \mathbf{u}^T \mathbf{v} = [u_x, u_y, u_z] \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \\ &= u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z. \end{aligned} \quad (1.9)$$

³The geometrical proof of the distributivity can be easily deduced from the following figure.



In the algebraic definition of the scalar product, the distributivity is assumed.

⁴The components are also often written u_1, u_2, u_3 .

Thus the length or norm takes the form

$$u = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} \quad (1.10)$$

that corresponds to the Pythagoras' theorem. Furthermore, the scalar product can be used to prove the **cosine theorem**. In fact the square of the sum of the vectors of FIG. 1.3 gives

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^2 &= (\mathbf{a} - \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 - 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \\ &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \chi. \end{aligned} \quad (1.11)$$

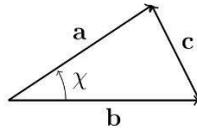


Figure 1.3: Cosine theorem

1.3 Vector Product and Mixed Product

The **vector product** or cross product of the arrow vectors \mathbf{u} and \mathbf{v} is the vector written $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Its magnitude follows from the product of the lengths u and v times the sine of the angle χ between \mathbf{u} and \mathbf{v} . Its direction is given by the unit vector \mathbf{n} orthogonal to \mathbf{u} and \mathbf{v} and oriented according to the corkscrew rule

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{n} uv \sin \chi. \quad (1.12)$$

As shown in FIG. 1.4, the quantity $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = uv \sin \chi$ is equal to the surface of the parallelogram delimited by the vectors \mathbf{u} and \mathbf{v} . The vector product has the anticommutative property

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}.$$

Moreover, two collinear vectors \mathbf{u}, \mathbf{u}' satisfy the relation $\mathbf{u} \times \mathbf{u}' = 0$. For instance the orthonormal vectors $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ obey the relations

$$\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_x = 0 \quad \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_y = 0 \quad \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_z = 0 \quad (1.13)$$

$$\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z \quad \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x \quad \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y. \quad (1.14)$$

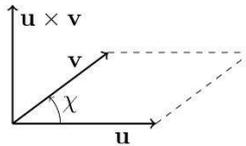


Figure 1.4: Vector product

The vector product can also be expressed in components. In order to do that, we consider the vectors \mathbf{u} and \mathbf{v} as linear combinations and assume the distributivity⁵ of the vector product. Then by using the above-given properties, it is easy to obtain the expression

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \times \mathbf{v} &= (u_x \mathbf{e}_x + u_y \mathbf{e}_y + u_z \mathbf{e}_z) \times (v_x \mathbf{e}_x + v_y \mathbf{e}_y + v_z \mathbf{e}_z) \\ &= u_x v_x \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_x + u_x v_y \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y + u_x v_z \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_z + u_y v_x \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_x + \dots \\ &= (u_y v_z - u_z v_y) \mathbf{e}_x + (u_z v_x - u_x v_z) \mathbf{e}_y + (u_x v_y - u_y v_x) \mathbf{e}_z\end{aligned}$$

that provides the vector product⁶ in component form

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_y v_z - u_z v_y \\ u_z v_x - u_x v_z \\ u_x v_y - u_y v_x \end{bmatrix}. \quad (1.15)$$

A calculation in components allows to check (homework) the vector identity

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{v}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) - \mathbf{w}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}). \quad (1.16)$$

The association of scalar and vector products leads to the **mixed product** also called scalar triple product

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) &= u_x(v_y w_z - v_z w_y) + u_y(v_z w_x - v_x w_z) + u_z(v_x w_y - v_y w_x) \\ &= \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}\end{aligned} \quad (1.17)$$

that can be written as a determinant representing the volume described in FIG. 1.5. It is easy to verify the cyclic identities

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{u}). \quad (1.18)$$

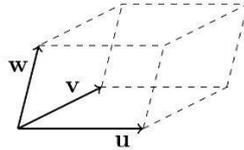


Figure 1.5: Mixed product

1.4 Coordinate Systems

The choice of coordinates depends on the kind of motion we want to describe. Starting from cartesian coordinates, we define below the most used coordinate systems.

⁵The geometrical proof of the distributivity of the vector product is not obvious.

⁶The vector product can be written as a formal determinant

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}.$$

1.4.1 Cartesian Coordinates (x, y, z)

As we know, cartesian coordinates are defined by the vectors of the standard basis

$$\mathbf{e}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (1.19)$$

The position vector \mathbf{r} is then given by the linear combination

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (1.20)$$

An example of use of cartesian coordinates is given by the motion of a projectile

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ v_{0y}t \\ -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0z}t \end{bmatrix} \\ &= v_{0y}t\mathbf{e}_y + \left(-\frac{1}{2}gt^2 + v_{0z}t\right)\mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (1.21)$$

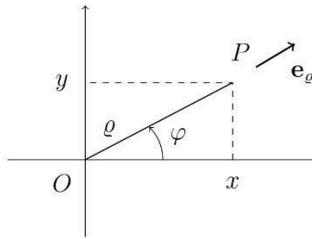


Figure 1.6: Polar coordinates (ϱ, φ)

1.4.2 Polar Coordinates (ϱ, φ)

For some two-dimensional systems with rotational symmetry, it is more appropriate to use **polar coordinates** (ϱ, φ) . From FIG. 1.6, we see that they are related to cartesian coordinates (x, y) by the transformation

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \varrho \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \varrho \in [0, \infty) \\ \varphi \in [0, 2\pi) \end{array} \quad (1.22)$$

symbolically written⁷ $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\varrho, \varphi)$. With the definition of the unit vector of radial direction

$$\mathbf{e}_\varrho = \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix}, \quad (1.23)$$

⁷The relation $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\varrho, \varphi)$ between cartesian coordinates and polar coordinates uses the same letter for the vector \mathbf{r} as for the function of variables ϱ, φ .

this transformation takes the simple form

$$\mathbf{r} = \varrho \mathbf{e}_\varrho \quad (1.24)$$

and gives the norm $|\mathbf{r}| = \varrho |\mathbf{e}_\varrho| = \varrho$. An example of use of polar coordinates is given by a circular motion described by the parametric equations of a circle

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = r_0 \begin{bmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{bmatrix} = r_0 \mathbf{e}_\varrho$$

where r_0 is the radius and $\omega = \dot{\varphi}$ is constant.

1.4.3 Cylindrical Coordinates (ϱ, φ, z)

It is now immediate to pass to cylindrical coordinates. As shown in FIG. 1.7, **cylindrical coordinates** (ϱ, φ, z) are defined by the transformation

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varrho \cos \varphi \\ \varrho \sin \varphi \\ z \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \varrho \in [0, \infty) \\ \varphi \in [0, 2\pi) \\ z \in (-\infty, +\infty) \end{array} \quad (1.25)$$

symbolically written $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\varrho, \varphi, z)$.

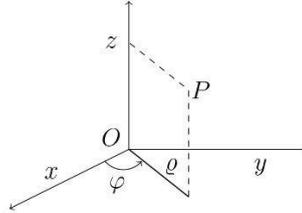


Figure 1.7: Cylindrical coordinates (ϱ, φ, z)

The transformation can also be expressed as a linear combination

$$\mathbf{r} = \varrho \mathbf{e}_\varrho + z \mathbf{e}_z \quad (1.26)$$

of the two unit vectors

$$\mathbf{e}_\varrho = \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (1.27)$$

Owing to the orthonormality property of these two vectors, we get the norm $|\mathbf{r}| = \sqrt{\varrho^2 + z^2}$. As an example of use of cylindrical coordinates, we can consider a helicoidal motion described by the parametric equations

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} r_0 \cos \omega t \\ r_0 \sin \omega t \\ \frac{a}{2\pi} \omega t \end{bmatrix} \\ &= r_0 \mathbf{e}_\varrho + \frac{a}{2\pi} \omega t \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (1.28)$$

where r_0 is the radius, a the spacing between the turns, and $\omega = \dot{\varphi}$ is constant.

1.4.4 Spherical Coordinates (r, ϑ, φ)

Spherical coordinates are fixed by a length r and two angles. The projections of the vector \mathbf{r} on the axes of FIG. 1.8 provides the **spherical coordinate** transformation

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} r \in [0, \infty) \\ \vartheta \in [0, \pi) \\ \varphi \in [0, 2\pi) \end{array} \quad (1.29)$$

This transformation is symbolically written $\mathbf{r} = \mathbf{r}(r, \vartheta, \varphi)$. With the definition of the unit radial vector

$$\mathbf{e}_r = \begin{bmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{bmatrix}, \quad (1.30)$$

it takes the simple form⁸

$$\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r \quad (1.31)$$

that immediately gives the norm $|\mathbf{r}| = r|\mathbf{e}_r| = r$.

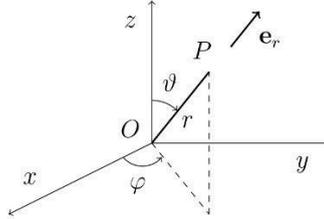


Figure 1.8: Spherical coordinates (r, ϑ, φ)

Finally, it is important to mention that the basis vectors of polar, cylindrical and spherical coordinates can also be defined. However, these basis vectors are varying in time. They form a local basis. As it will be shown in the next chapter, they naturally appear in the calculation of the time derivative of the position vector $\mathbf{r}(t)$.

1.5 Linear Transformations

So far we have considered operations involving the addition of vectors, multiplication of vectors by scalars, the scalar product of two vectors, resulting in a scalar, and the cross product between two vectors that results in a new vector.

In this section we introduce an operation that takes one vector and result in another one. A very diverse class of geometrical transformations can be described in this way only by means of a matrix-vector multiplication: This is the case of the so called linear transformations.

In general terms, given a (3×3) matrix M and a vector in three dimensions \mathbf{v} , the result of the multiplication $M\mathbf{v}$ will be another vector,

$$\mathbf{u} = M\mathbf{v}$$

⁸The expression $\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r$ compared to the linear combination $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ shows that the cartesian components of \mathbf{r} are given by (x, y, z) whereas the spherical components of \mathbf{r} by $(r, 0, 0)$. In order to avoid confusion, the column-vector notation should be kept for cartesian coordinates.

Of course, analogous results apply for (2×2) matrices and vectors in 2 dimensions. And, depending on the values of the matrix M , there is a clear geometrical meaning in the transformation that brings \mathbf{v} to \mathbf{u} .

Linearity of transformations

a transformation T on an input vector \mathbf{v} ($T(\mathbf{v})$ takes a vector \mathbf{v} and produces another vector $T(\mathbf{v})$) is said to be linear if $T(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha T(\mathbf{u}) + \beta T(\mathbf{v})$ for any pair of vectors \mathbf{u} and \mathbf{v} and scalars α, β . The Matrix-vector multiplication is linear since

$$M(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha M\mathbf{u} + \beta M\mathbf{v}$$

Notice that $M(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v})$ is the matrix M multiplied by the vector $\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$.

The identity transformation

The identity transformation \mathbb{I} leaves the vector to which it is applied unchanged, i.e. , $\mathbb{I}\mathbf{v} = \mathbf{v}$ for any vector \mathbf{v} . The matrix corresponding to the identity transformation is the identity matrix, i.e. a matrix with 1 in the diagonal and zeros otherwise.

We can write the element i, j of this matrix as

$$\mathbb{I}_{i,j} = \delta_{i,j}$$

where $\delta_{i,j}$ denotes the Kronecker delta:

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases}$$

Composition of linear transformations

Two linear transformations defined by the matrices M and N can be applied in succession: $MN(\mathbf{v}) = M(N\mathbf{v}) = (MN)\mathbf{v}$ i.e. the transformation MN is given by the matrix multiplication of M by N . Of course the resulting transformation is still linear as can be proven by direct substitution.

It is very remarkable the fact that, in general, $MN \neq NM$, i.e. matrix multiplication does not commute in general. Although this is a very advanced topic, the non-commutativity plays an essential role in the formulation of the quantum field theory in particle physics.

Invertible linear transformations

A linear transformation M is said to be invertible if there exists another transformation, that we denote as M^{-1} such that $M^{-1}M = \mathbb{I}$. It can be shown that if the inverse transformation exists, it is unique and that M commutes with its inverse.

For the interested reader, the fact that the composition of two linear and invertible transformations results in another one, gives the set of linear invertible transformations together with the composition rule the algebraic structure of a group.

1.5.1 Some important transformations

Rotations

A rotation in two or three dimensions can be described by a matrix that we shall denote as R_θ (there's no standard notation in this regard), θ being the angle of rotation. In three dimensions we should also specify the axis of rotation. To simplify the description, we consider only two dimensional rotations where the angle θ suffices to completely describe the rotation.

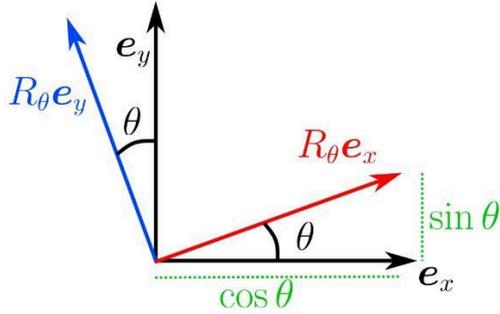


Figure 1.9: Sketch of a rotation in 2D. Notice how the basis vectors rotate for a given angle.

In order to construct the rotation matrix R_θ it is enough to consider the transformation of the vectors of the standard base \mathbf{e}_x and \mathbf{e}_y . Since the rotation is a linear transformation, any vector \mathbf{v} can be expressed as $x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y$, and hence

$$R_\theta \mathbf{v} = R_\theta (x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y) = xR_\theta \mathbf{e}_x + yR_\theta \mathbf{e}_y$$

As can be seen in the figure 1.9, $R_\theta \mathbf{e}_x = \cos \theta \mathbf{e}_x + \sin \theta \mathbf{e}_y$. Analogously, $R_\theta \mathbf{e}_y = -\sin \theta \mathbf{e}_x + \cos \theta \mathbf{e}_y$.

It is very convenient now to work with coordinates:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$R_\theta \mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \end{pmatrix}$$

It is straightforward to prove by substitution that

$$R_\theta \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \end{pmatrix}$$

Hence the matrix representation of the transformation R_θ is

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Notice that $R_{\theta=0} = \mathbb{I}$ as expected: A rotation of zero angle leaves vectors unchanged. Also, we can think intuitively that

$$R_\alpha R_\beta = R_\beta R_\alpha = R_{\alpha+\beta}$$

meaning that a rotation of angle α followed by a rotation of angle β is the same as a rotation of angle β followed by a rotation of angle α which is the same as a single rotation of angle $\alpha + \beta$. The formal proof of the previous statement is not complicated (by using trigonometric identities), but rather tedious. Notice that in three dimensions the previous statement is still true if the axis of rotation is the same for both rotations but it is not true in general that two rotations in 3D commute.

From the previous results, we have $R_\theta R_{-\theta} = R_{-\theta} R_\theta = R_0 = \mathbb{I}$. Hence the inverse of a rotation is $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$

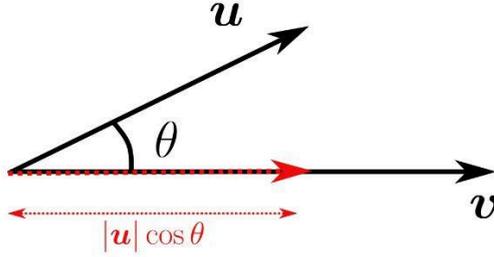


Figure 1.10: Sketch of a projection (any dimensionality).

Projections

A completely different set of linear transformation with regard to rotations are projections. For two given vectors \mathbf{u} and \mathbf{v} sometimes it is useful to obtain the projection of the vector \mathbf{u} onto the vector \mathbf{v} . In order to find the projection, we consider a unit vector along the direction of \mathbf{v} with norm $|\mathbf{u}| \cos \theta$, as shown in figure 1.10. So the projection of \mathbf{u} onto \mathbf{v} , that we denote here as $P_v \mathbf{u}$ is

$$P_v \mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} |\mathbf{u}| \cos \theta = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos \theta = \mathbf{v} \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \right)$$

Hence we can relate the scalar product with projections. Furthermore, in order to find the matrix associated to this transformation, we use the row-column form of the scalar product $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{v}^T \mathbf{u}$. We can write the projection as

$$P_v \mathbf{u} = \frac{1}{|\mathbf{v}|^2} \mathbf{v} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \frac{1}{|\mathbf{v}|^2} \mathbf{v} \mathbf{v}^T \mathbf{u}$$

Or, conveniently grouping terms, we can write the matrix associated to the projector as

$$P_v = \frac{1}{|\mathbf{v}|^2} \mathbf{v} \mathbf{v}^T$$

It is important to notice that $\mathbf{v} \mathbf{v}^T$ is a legitimate operation that results in a matrix and, of course, it depends only on the vector \mathbf{v} .

It can be shown, in fact is very intuitive, that the matrix P_v has no inverse regardless of the vector \mathbf{v} . Also, since projecting a vector that has been already projected results in no change, then the matrix product of the projector with itself results in the projector:

$$P_v P_v = P_v$$

It is said that the transformation P_v is idempotent.

With this property, it is very simple to show that $P_v (\mathbb{I} - P_v) = 0$, the null matrix. In fact the linear transformation $(\mathbb{I} - P_v)$ corresponds to the projector onto the space perpendicular to \mathbf{v} , and hence results in a vector that is perpendicular to \mathbf{v} .

The previous considerations about linear operators can be extended to any dimensionality and other classes of operators. This generalizations are essential in quantum mechanics, crystallography and many other branches of physics and, certainly, will be studied in more advanced courses.

Chapter 2

Kinematics of a Point Mass

The position vector and its representation in various coordinates has been defined in the first chapter. In a next step, we intend to calculate its time derivatives and to express the velocity and the acceleration in polar, cylindrical, and spherical coordinates. Before to do that, it is useful to make clear some basic notions of differential calculus.

2.1 Derivative and Differential

2.1.1 Definitions

In this section we give an introduction to derivatives that should be already known from mathematics courses prior to university. We only revisit here the most important definitions and properties. We encourage students to have a look to this section even if they have a good understanding on the subject, in particular to fix the notation we are using.

A function $f(x)$ is said to be derivable at the point x if the following limit exists and it is finite

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \quad (2.1)$$

The quantity $f'(x)$ is called the **derivative** of f at x . We notice here that the quantity h in the limit $h \rightarrow 0$ does not have a definite sign, h can be either negative or positive and the limit defining the derivative must be unique regardless of the sign of h .

Another way of introducing the derivative is through the use of the **differential** of the function f at the point x . The value of the function f at a point $x+dx$ is given, by definition, as

$$f(x+dx) = f(x) + df(x, dx) + \varepsilon(x, dx) \quad (2.2)$$

with the constraint on the function $\varepsilon(x, dx)$

$$\lim_{dx \rightarrow 0} \frac{\varepsilon(x, dx)}{dx} = 0 \quad (2.3)$$

It must be noticed that the functions $df(x, dx)$ and $\varepsilon(x, dx)$ depend on both variables x and dx (don't be afraid, the variable dx is just another number just as x is, don't get confused by the fact that the name of this variable has two letters instead of only one!). We must understand that, in equation (2.2), the results depend on the point x at which we are calculating the function f and how far from x we move, i.e., the value of dx . This is particularly the case for the function $df(x, dx)$

Equation (2.2) can be written in an equivalent form as

$$\frac{df(x, dx)}{dx} = \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx} - \frac{\varepsilon(x, dx)}{dx}, \quad (2.4)$$

we notice at this point that all quantities in equation (2.4) are finite in general, we do not need to take any limit yet, in particular in the quantity dx .

If we suppose now that the condition (2.3) applies and we take the limit $dx \rightarrow 0$ we obtain

$$\lim_{dx \rightarrow 0} \frac{df(x, dx)}{dx} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx} - \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{\varepsilon(x, dx)}{dx} \quad (2.5a)$$

$$= \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx} \left(, \text{ since } \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{\varepsilon(x, dx)}{dx} = 0 \right) \quad (2.5b)$$

$$= f'(x) \quad (\text{by virtue of the definition on eq. (2.1)},) \quad (2.5c)$$

this behavior is illustrated in figure 2.1

The **differential of the function $f(x)$ at the point x** , denoted as $df(x)$, or simply as df (understanding that it depends on x) is

$$df(x) = \lim_{dx \rightarrow 0} df(f, dx) = \lim_{dx \rightarrow 0} f'(x) \cdot dx = f'(x) \lim_{dx \rightarrow 0} dx. \quad (2.6)$$

Of course, the last term on the right, $\lim_{dx \rightarrow 0} dx$ tends to zero. The important point here is that it is proportional to the value of dx that will be considered to be “small” but never exactly zero. In a similar way one might think of the function $\varepsilon(x, dx)$ as something being proportional to a power of dx greater than 1 for “small” values of dx , so we fulfill the limit in eq.(2.3). The exact behavior of $\varepsilon(x, dx)$ is related to the second derivatives of the function $f(x)$ and, once considered, leads to the so called Taylor expansion that we shall introduce in the next chapter.

In general we the following notation for derivatives in an interchangeably way

$$f'(x) = f' = \frac{df(x)}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) \quad (2.7)$$

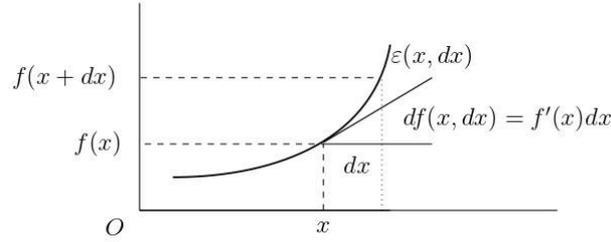
We read $\frac{df(x)}{dx}$ as “derivative of f with respect to x ”. Another typical notation for the derivative of a function with respect to its argument at a particular point $x = a$ is

$$\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=a}$$

Since the derivative of a function is another function, we can of course calculate the derivative of this new function, i.e. we calculate

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{df(x)}{dx} \right) \equiv \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \equiv f''(x) \equiv f^{(2)}(x) \quad (2.8)$$

we call this function (if it exists!) the second derivative of f with respect to x . We can add a double prime to denote it or a subscript (2). Very often the subscript (1) is equivalent to a prime, indicating first derivative. In some applications where many successive derivatives appear (eg. Taylor series), we can put a subscript (0) to denote the function without taking any derivative, i.e. $f^{(0)}(x) = f(x)$. Of course we talk about “third derivative”, “fourth derivative” and so on and, in general, the n -th derivative. Notice that the existence of a derivative at any particular point is not guaranteed even if previous derivatives in deed exist.

Figure 2.1: Differential : $f(x + dx) = f(x) + df(x, dx) + \varepsilon(x, dx)$

2.1.2 Some important properties of derivatives and differentials

1. The derivative is a linear operation transforming functions into other functions. Quite obviously, the derivative of a function $f(x)$ taken at all points x (where it exist) is another function $f'(x)$. By the previous definitions, it is clear that, for any pair of differentiable functions $f(x)$ and $g(x)$ and any two scalars α and β ,

$$\frac{d}{dx} [\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)] = \alpha \frac{d}{dx} f(x) + \beta \frac{d}{dx} g(x), \quad (2.9)$$

hence, the derivative is a linear transformation.

2. Derivative of the product.

If we apply very definition of derivative to the product $f \cdot g$,

$$\frac{d[f(x) \cdot g(x)]}{dx} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{f(x + dx) \cdot g(x + dx) - f(x) \cdot g(x)}{dx}. \quad (2.10)$$

Considering that

$$\lim_{dx \rightarrow 0} f(x + dx) = f(x) + dx \cdot f'(x) \quad (2.11a)$$

$$\lim_{dx \rightarrow 0} g(x + dx) = g(x) + dx \cdot g'(x) \quad (2.11b)$$

and substituting this into eq.(2.10) we have

$$\begin{aligned} & \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{f(x + dx) \cdot g(x + dx) - f(x) \cdot g(x)}{dx} \\ &= \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{[f(x) + dx \cdot f'(x)] [g(x) + dx \cdot g'(x)] - f(x) \cdot g(x)}{dx} \\ &= \lim_{dx \rightarrow 0} f'(x) g(x) + f(x) g'(x) + dx \cdot f'(x) g'(x) = f'(x) g(x) + f(x) g'(x) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Hence,

$$(f \cdot g)' = f'g + fg' \quad (2.13)$$

gives the derivative of a product of functions.

3. The derivative of the composition of functions is given by the **chain rule**. The composition of two functions $(g \circ f)(x)$ is equivalent to calculate the function g

with an argument $f(x)$, i.e. $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. The derivative of the composition is given by

$$\frac{d(g \circ f)(x)}{dx} = \frac{dg(f(x))}{dx} = \frac{dg(f)}{df} \cdot \frac{df(x)}{dx} = g'(f(x)) \cdot f'(x) \quad (2.14)$$

which is the product of the derivative of the function f with respect to x times the derivative of g with respect to f (its argument!). A complete derivation is typically done in a first semester course on analysis.

4. Derivative of the inverse function.

For any derivable function which is also bijective, meaning that if $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, i.e. the values of $f(x)$ are unique and hence we can obtain the x if we know the value of $f(x)$, hence the function $f(x)$ is invertible (in a given interval). We denote the inverse function as f^{-1} and it is a function that returns the (single) value of x given the value of $f(x)$. Hence,

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad (2.15)$$

we apply the chain rule, we have

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(f(x)) = \frac{df^{-1}(f)}{df} \frac{df(x)}{dx} = \frac{dx}{dx} = 1$$

Hence, **the derivative of f^{-1} with respect to its argument is**

$$\frac{df^{-1}(f)}{df} = 1 / \left(\frac{df(x)}{dx} \right) \Big|_{x=f^{-1}(f(x))} \quad (2.16)$$

This notation may be confusing: We have to evaluate the derivative of $f(x)$ with respect to x at the point x where the inverse function is evaluated, which most of the times is difficult.

Let us consider a practical example: The function $\cos(x)$ is bijective in the interval $x \in (0, \pi/2)$ (angles in radians!, we don't include the points $x = 0$ or $x = \pi$ for simplicity), in particular $\cos(x) \in [0, 1]$ in this interval and it is invertible. We denote the inverse function of \cos by $\cos^{-1}(x)$ (the arccos function). Notice that we denote the argument of \cos^{-1} by x . Now $x \in (-1, 1)$, and $\cos^{-1}(x)$ is a number such that its cosine is x , i.e. $\cos(\cos^{-1}(x)) = x$.

$$\frac{d \cos^{-1}(x)}{dx} = \frac{1}{\left(\frac{d \cos(y)}{dy} \right) \Big|_{y=\cos^{-1} x}} \quad (2.17)$$

We know from the High School that

$$\frac{d \cos(y)}{dy} = -\sin(y) \quad (2.18)$$

that we have to evaluate at an argument $y = \cos^{-1}(x)$ to then calculate its sin function, but we know that x must be the cosine of a number. In particular we know that, no

matter what that number is, $\cos^2(y) + \sin^2(y) = 1$ and hence, $\sin(y) = \sqrt{1 - \cos^2(y)}$ (recall we are only considering angles in $(0, \pi)$). So we can write

$$\left(\frac{\cos(y)}{dy}\right)\Big|_{y=\cos^{-1}x} = -\sin(y)\Big|_{y=\cos^{-1}x} = -\sqrt{1 - \cos^2(y)} \quad (2.19)$$

Since we know (by definition of $y \equiv \cos^{-1}x$) that $\cos(y) = x$, we can substitute in the previous expression to get

$$\left(\frac{\cos(y)}{dy}\right)\Big|_{y=\cos^{-1}x} = -\sin(y)\Big|_{y=\cos^{-1}x} = -\sqrt{1 - \cos^2(y)} = -\sqrt{1 - x^2} \quad (2.20)$$

The final result is hence:

$$\frac{d \cos^{-1}(x)}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (2.21)$$

we recall that the points $x = \pm 1$ are excluded and hence we avoid dividing by zero in the derivative.

5. Notation for time dependent functions.

In this course we shall deal with functions that depend on time $f(t)$. In this particular case, we use the "dot" notation:

$$\frac{df(t)}{dt} \equiv \dot{f}(t) \quad (2.22)$$

Since $\dot{f}(t)$ is also another function of time, we can derivate it again. We can hence define $\ddot{f}(t)$ (second derivative with respect to time), etc...

6. Derivative of a vector that depends on time: Velocity

The position of a point in space that changes with time is described in Cartesian coordinates as a vector

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

it is natural hence to consider the time derivatives of each of the coordinates with respect to time: This describes the **velocity vector** of the point

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \dot{\mathbf{r}}(t) = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

The **differential of the vector** $d\mathbf{r}$ will be, generalizing the concept of differential for a scalar function,

$$d\mathbf{r} = \dot{\mathbf{r}} dt \quad (2.25)$$

and the norm of $d\mathbf{r}$ is

$$ds \equiv |d\mathbf{r}| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2} dt = |\dot{\mathbf{r}}| dt \quad (2.26)$$

For examples of derivatives of particular functions such as power, exponential, trigonometric, etc, we refer the reader to notes on previous courses, first year undergraduate analysis textbooks and (with care!) tables in the internet.

2.1.3 Total Differential

For a function f of several variables

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \longmapsto & f(x, y, z), \end{array} \quad (2.27)$$

the **partial derivative** of f with respect to x at \mathbf{r} is defined by the limit

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{r}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y, z) - f(x, y, z)}{h} \quad (2.28)$$

and the same definition holds for the other variables y and z . Moreover, it is possible to show¹ that the total differential of the function f is given by the sum

$$df(h_x, h_y, h_z) = \frac{\partial f}{\partial x} h_x + \frac{\partial f}{\partial y} h_y + \frac{\partial f}{\partial z} h_z. \quad (2.29)$$

In the particular case of the coordinate functions

$$(x, y, z) \longmapsto x \quad (x, y, z) \longmapsto y \quad (x, y, z) \longmapsto z,$$

formula (2.29) provides the differentials

$$dx(h_x, h_y, h_z) = h_x \quad dy(h_x, h_y, h_z) = h_y \quad dz(h_x, h_y, h_z) = h_z$$

and leads to the expression

$$df(h_x, h_y, h_z) = \frac{\partial f}{\partial x} dx(h_x, h_y, h_z) + \frac{\partial f}{\partial y} dy(h_x, h_y, h_z) + \frac{\partial f}{\partial z} dz(h_x, h_y, h_z)$$

valid for any h_x, h_y, h_z . We arrive at the **total differential** of the function f

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \quad (2.30)$$

in the notation used by physicist. With the symbol **nabla** ∇ and the compact notation $\partial_x f \equiv \partial f / \partial x$ for the partial derivative, the **gradient** of the function f is defined by the vector

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \\ \partial_z f \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

which allows for expressing the differential (2.30) as the scalar product

$$df = \nabla f \cdot d\mathbf{r}. \quad (2.32)$$

Moreover, if \mathbf{r} is a function of t , we can write $d\mathbf{r} = \dot{\mathbf{r}} dt$ and the differential takes the form

$$df = \nabla f \cdot d\mathbf{r} = (\nabla f \cdot \dot{\mathbf{r}}) dt = \dot{f} dt$$

where we have defined the **total derivative** of a function of several variables

$$\dot{f} \equiv \frac{df}{dt} = \nabla f \cdot \dot{\mathbf{r}} = \partial_x f \dot{x} + \partial_y f \dot{y} + \partial_z f \dot{z}. \quad (2.33)$$

¹The proof is given in the course of analysis

For instance, formula (2.30) applied to the vector function $\mathbf{r}(\varrho, \varphi, z)$ given by

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varrho \cos \varphi \\ \varrho \sin \varphi \\ z \end{bmatrix}$$

provides the differential

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varrho} d\varrho + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} dz = \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix} d\varrho + \varrho \begin{bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix} d\varphi + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} dz. \quad (2.34)$$

2.2 Velocity and Acceleration

The time derivative of the position vector defines the **velocity**

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t). \quad (2.35)$$

In cartesian coordinates, the basis vectors $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ are time-independent and therefore provides the expression

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{x}\mathbf{e}_x + \dot{y}\mathbf{e}_y + \dot{z}\mathbf{e}_z = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix}. \quad (2.36)$$

The time derivative of the velocity defines the **acceleration**

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t) &= \ddot{x}\mathbf{e}_x + \ddot{y}\mathbf{e}_y + \ddot{z}\mathbf{e}_z \\ &= \begin{bmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

2.2.1 Angular Velocity

In view of the importance of the concept of angular velocity, let us define it and establish its relation with the velocity \mathbf{v} . In order to do that, we consider a point mass m performing a rotation of angle $\varphi(t)$. As shown in FIG. 2.2, the mass is attached to the rotation axis \mathbf{n} with an arm of length a . The time derivative of the arc length $s = a\varphi$ traveled by the mass gives the velocity

$$|\dot{\mathbf{r}}| = a\dot{\varphi}. \quad (2.38)$$

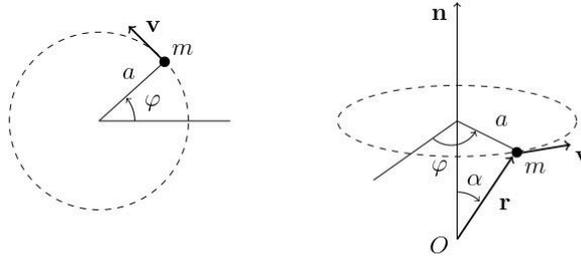
This velocity can be expressed as a function of the position vector \mathbf{r} by means of the trigonometric relation $a = r \sin \alpha$ that gives

$$|\dot{\mathbf{r}}| = \dot{\varphi} r \sin \alpha. \quad (2.39)$$

We define the **angular velocity** by the vector

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{n}\dot{\varphi} \quad (2.40)$$

orthogonal to the rotation plane and of direction \mathbf{n} given by the corkscrew rule. Since $\dot{\mathbf{r}}$ is tangent to the circle of FIG. 2.2 and therefore orthogonal to the plane defined by the vectors

Figure 2.2: Particle rotating around the axis \mathbf{n}

\mathbf{n} and \mathbf{r} , it is possible to express (2.39) as a vector product and get the general relation between the velocity vector $\dot{\mathbf{r}}$ and the angular velocity

$$\dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}. \quad (2.41)$$

This relation can also be easily established (homework) by using the derivative of the position vector in cylindrical coordinates.

2.2.2 Velocity and Acceleration in Cylindrical Coordinates

The first derivative of the position vector (1.26) expressed in cylindrical coordinates leads to the expression

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= (\dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \dot{z} \mathbf{e}_z) \\ &= \dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \rho \dot{\mathbf{e}}_\rho + \dot{z} \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

where \mathbf{e}_z is constant but \mathbf{e}_ρ (1.27) depends on time. The calculation of the derivative of the function $\mathbf{e}_\rho(\varphi(t))$, by means of the chain rule, gives the result

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_\rho &= \begin{bmatrix} -\sin \varphi \dot{\varphi} \\ \cos \varphi \dot{\varphi} \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \dot{\varphi} \begin{bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix} = \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi \end{aligned}$$

where we have defined the unit vector \mathbf{e}_φ . We thus arrive at the general expression of the velocity vector in cylindrical coordinates

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi + \dot{z} \mathbf{e}_z. \quad (2.42)$$

The velocity $\dot{\mathbf{r}}$ appears as a linear combination of the three following vectors that define the **cylindrical basis**

$$\mathbf{e}_\rho = \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_\varphi = \begin{bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.43)$$

It remains to verify (do it !) that these three vectors are linearly independent. This means that $a\mathbf{e}_\rho + b\mathbf{e}_\varphi + c\mathbf{e}_z = 0$ entails $a = b = c = 0$. Moreover these vectors are orthonormal as it can be easily seen. They define a coordinate system moving with the point particle and form a so-called **local basis**. From (2.42), we deduce the total differential

$$d\mathbf{r} = \dot{\mathbf{r}}dt = \mathbf{e}_\rho d\rho + \rho \mathbf{e}_\varphi d\varphi + \mathbf{e}_z dz \quad (2.44)$$

where, according to (2.6), the differentials

$$d\rho = \dot{\rho}dt \quad d\varphi = \dot{\varphi}dt \quad dz = \dot{z}dt$$

of each coordinate function have been introduced. Formula (2.44) was already deduced directly from the definition of the total differential in Eq. (2.34). Owing to the orthonormality of the basis vectors, the norm of the velocity reads

$$\begin{aligned} |\dot{\mathbf{r}}| = \sqrt{\dot{\mathbf{r}}^2} &= \sqrt{(\dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi + \dot{z} \mathbf{e}_z)^2} \\ &= \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

As an application, let us consider a helicoidal motion of radius $r_0 = \rho$ and angular velocity $\omega = \dot{\varphi}$. The spacing a between the turns provides the coordinate

$$z = \frac{a}{2\pi} \varphi$$

and leads to the norm of the velocity

$$v = \omega \sqrt{r_0^2 + (a/2\pi)^2}.$$

By means of the derivative product rule applied on (2.42), we calculate the acceleration

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \dot{\rho} \dot{\mathbf{e}}_\rho + \dot{\rho} \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi + \rho \ddot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi + \rho \dot{\varphi} \dot{\mathbf{e}}_\varphi + \ddot{z} \mathbf{e}_z$$

where the relations

$$\dot{\mathbf{e}}_\rho = \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi \quad \dot{\mathbf{e}}_\varphi = -\dot{\varphi} \mathbf{e}_\rho,$$

deduced from (2.43), lead to the expression

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\rho} \mathbf{e}_\rho + 2\dot{\rho} \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi + \rho \ddot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi - \rho \dot{\varphi}^2 \mathbf{e}_\rho + \ddot{z} \mathbf{e}_z$$

that provides the acceleration in cylindrical coordinates

$$\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) \mathbf{e}_\rho + (2\dot{\rho} \dot{\varphi} + \rho \ddot{\varphi}) \mathbf{e}_\varphi + \ddot{z} \mathbf{e}_z. \quad (2.46)$$

In the case of a circular motion of radius r_0 , where

$$z = 0 \quad \rho = r_0 \quad \dot{\varphi} = \omega$$

the **normal acceleration** a_n is defined by the projection of $\ddot{\mathbf{r}}$ on $-\mathbf{e}_\rho$

$$\begin{aligned} a_n &= -(\ddot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{e}_\rho) \\ &= \frac{(r_0 \dot{\varphi})^2}{r_0} \\ &= \frac{v^2}{r_0} \end{aligned} \quad (2.47)$$

and the **tangential acceleration** a_t by the projection of $\ddot{\mathbf{r}}$ on \mathbf{e}_φ

$$\begin{aligned} a_t &= (\ddot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{e}_\varphi) \\ &= r_0 \ddot{\varphi} \\ &= \dot{v}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

In both case, we have used the relation $v = r_0 \dot{\varphi}$ between velocity and angular velocity.

2.2.3 Velocity in Spherical Coordinates

The velocity in spherical coordinates is obtained in the same way as above. The first derivative of the position vector $\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r$ leads (homework) to the linear combination

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\vartheta} \mathbf{e}_\vartheta + r \sin \vartheta \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi \quad (2.49)$$

of the vectors of the **spherical basis**

$$\mathbf{e}_r = \begin{bmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_\vartheta = \begin{bmatrix} \cos \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta \sin \varphi \\ -\sin \vartheta \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_\varphi = \begin{bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.50)$$

These vectors satisfy the orthogonality properties

$$(\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_\vartheta) = 0, \quad (\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_\varphi) = 0, \quad (\mathbf{e}_\vartheta \cdot \mathbf{e}_\varphi) = 0$$

and the normalization

$$|\mathbf{e}_r| = 1, \quad |\mathbf{e}_\vartheta| = 1, \quad |\mathbf{e}_\varphi| = 1.$$

By introducing the differentials, we also have

$$d\mathbf{r} = \mathbf{e}_r dr + r \mathbf{e}_\vartheta d\vartheta + r \sin \vartheta \mathbf{e}_\varphi d\varphi. \quad (2.51)$$

The calculation of the acceleration can also be performed. It provides a lengthy expression that will not be written here.

Chapter 3

Dynamics of a Point Mass

The total force \mathbf{F} acting on a mass m affects the trajectory of the point mass according to Newton's law

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) \quad (3.1)$$

that yields a second order¹ differential equation submitted to the initial conditions

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0 \quad \dot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{v}_0. \quad (3.2)$$

Very often, in elementary physics courses, we guess the function that describes the motion and then verify that this function satisfies the differential equation. This condition is necessary, but not sufficient. The correct theoretical approach consists of determining the general solution of the differential equation given by the physical law. Depending on the form of the force, Eq. (3.1) can be nonlinear and its solutions difficult to find. In what follows, we restrict ourselves to physical systems described by **linear differential equations**². Some simple examples of linear differential equations are first discussed and then the results regarding these equations are summarized in Sec. 3.2.

3.1 Applications of Newton's Law

3.1.1 Projectile Motion

From the initial point $\mathbf{r}(0) = \mathbf{0}$, an object of mass m is thrown upwards with initial velocity $\mathbf{v}(0) = [0, v_{0y}, v_{0z}]^T$. In the absence of air friction, the mass is only subject to the weight³ and its motion is described by the Newton's equation

$$m\ddot{\mathbf{r}} = m\mathbf{g}.$$

With the choice of cartesian coordinates, this vector equation

$$m \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix}$$

¹A differential equation is of second order when the highest derivative is of order 2.

²A differential equation like (3.1) is linear if the functions $\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}$ appear linearly in the equation.

³The mean value of the gravitational acceleration at sea level is defined by $g = 9,80665 \text{ m s}^{-2}$, number generally rounded to $9,81 \text{ m s}^{-2}$. The value of g at zero height can increase from about $9,78$ to $9,83 \text{ m s}^{-2}$ when we go from the equator to the poles.

supplies three elementary second order differential equations

$$\ddot{x} = 0 \quad \ddot{y} = 0 \quad \ddot{z} = -g. \quad (3.3)$$

The determination of the solutions is quite simple. Two integrations or search of **primitives**⁴ provide the functions

$$x(t) = a_x t + b_x \quad y(t) = a_y t + b_y \quad z(t) = -gt^2/2 + a_z t + b_z.$$

The six initial conditions $\mathbf{r}(0) = 0$ and $\dot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{v}_0$ allow to determine the six constants of integration $a_x, a_y, a_z, b_x, b_y, b_z$ and lead to a unique solution

$$\begin{aligned} x(t) &= 0 \\ y(t) &= v_{0y} t \\ z(t) &= -\frac{1}{2} g t^2 + v_{0z} t. \end{aligned} \quad (3.4)$$

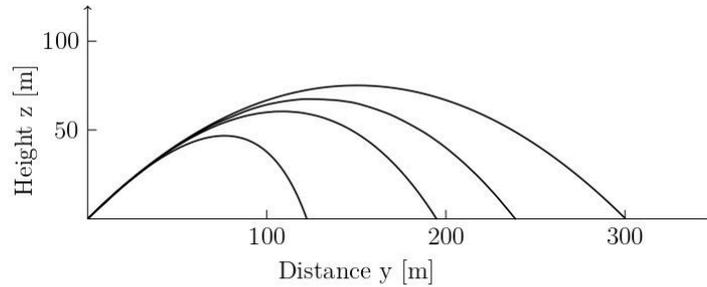


Figure 3.1: Projectile motion: $v_0 = 140 \text{ km/h}$ at 45° , $\frac{\alpha}{m} = 2.5, 1, 0.5, 0$

The elimination of the time t yields the parabola

$$z(y) = -\frac{1}{2} \frac{g}{v_{0y}^2} y^2 + \frac{v_{0z}}{v_{0y}} y \quad (3.5)$$

depicted in FIG. 3.1.

Let us go one step further and tackle the problem of projectile motion in a more realistic situation by introducing a viscous⁵ friction force $\mathbf{F}_f = -\alpha \dot{\mathbf{r}}$ due to air resistance. Then by setting $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ in the Newton's equation

$$m\dot{\mathbf{r}} = m\mathbf{g} - \alpha \dot{\mathbf{r}},$$

we obtain three first order linear differential equations

$$\dot{v}_x = 0 \quad (3.6)$$

$$\dot{v}_y + (\alpha/m)v_y = 0 \quad (3.7)$$

$$\dot{v}_z + (\alpha/m)v_z = -g. \quad (3.8)$$

submitted to the initial conditions $\mathbf{v}(0) = [0, v_{0y}, v_{0z}]^T$. The integration of the first equation gives a constant

$$v_x(t) = a_x \quad (3.9)$$

which is zero owing to the initial condition $v_x(0) = 0$. The second equation⁶ divided by v_y

⁴The function F is a primitive or antiderivative of f if $F'(x) = f(x)$.

⁵Experiments show that, for low velocity, the friction forces are proportional to the velocity $\dot{\mathbf{r}}$.

⁶This equation corresponds to a possible definition of the exponential function : $[e^x]' = e^x$.

exhibits a logarithmic derivative

$$\frac{d}{dt} \ln v_y = -\frac{\alpha}{m}$$

whose integration gives

$$\ln v_y = -(\alpha/m)t + a_y .$$

By exponentiating both sides, we get the solution

$$v_{hom}(t) \equiv v_y(t) = e^{a_y} e^{-\frac{\alpha}{m}t} . \quad (3.10)$$

The initial condition $v_y(0) = v_{0y}$ determines the constant $e^{a_y} = v_{0y}$. The third equation (3.8) cannot be directly integrated⁷ because of the inhomogeneous member $-g$. However, it is immediate to verify that the constant function

$$v_{part} = -\frac{m}{\alpha}g \quad (3.11)$$

satisfies Eq. (3.8) and is therefore a **particular solution**. Thus, by denoting v_{incho} the unknown general solution, it is possible to write the two differential equations

$$\begin{aligned} \dot{v}_{incho} + (\alpha/m)v_{incho} &= -g \\ \dot{v}_{part} + (\alpha/m)v_{part} &= -g \end{aligned}$$

whose difference eliminates the right member and yields the homogeneous equation

$$(\dot{v}_{incho} - \dot{v}_{part}) + (\alpha/m)(v_{incho} - v_{part}) = 0 .$$

The solution $v_{hom} = v_{incho} - v_{part}$ of this equation can be determined as above by considering the logarithmic derivative. And so the general solution of the inhomogeneous equation takes, with (3.10) and (3.11), the explicit form

$$\begin{aligned} v_z(t) \equiv v_{incho}(t) &= v_{hom}(t) + v_{part}(t) \\ &= e^{a_z} e^{-\frac{\alpha}{m}t} - \frac{m}{\alpha}g . \end{aligned} \quad (3.12)$$

The initial condition $v_z(0) = v_{0z}$ fixes the constant $e^{a_z} = v_{0z} + mg/\alpha$ and provides a unique velocity. This example shows that the solution of an inhomogeneous linear differential equation is given by the sum of the solution of the homogeneous equation and of a particular solution of the inhomogeneous equation. Finally, with the initial condition $\mathbf{r}(0) = 0$, the integration (homework) of the velocity functions yields the components of the position vector of the projectile m submitted to a viscous friction force

$$\begin{aligned} x(t) &= 0 \\ y(t) &= v_{0y} \frac{m}{\alpha} (1 - e^{-\frac{\alpha}{m}t}) \\ z(t) &= (v_{0z} + \frac{m}{\alpha}g) \frac{m}{\alpha} (1 - e^{-\frac{\alpha}{m}t}) - \frac{m}{\alpha}gt . \end{aligned} \quad (3.13)$$

The elimination of the time t gives the parabolas plotted in FIG. 3.1 for various values of the ratio α/m .

⁷Since $-g$ is constant, one could pass it on the left member of the equation and define the new solution of the homogeneous differential equation $v_{hom} = v_z + (m/\alpha)g$.

3.1.2 Plane Pendulum

The motion of a pendulum of mass m is given by the equation

$$m\ddot{\mathbf{r}} = m\mathbf{g} + \mathbf{T} \quad (3.14)$$

where \mathbf{T} is the tension force, namely a constraint force of unknown form. It represents the action of the rod of length l . The motion is restricted to the vertical xy -plane and the choice of polar coordinates is obviously suggested by FIG. 3.2. The calculation of the first and second derivatives of the position vector

$$\mathbf{r} = l \mathbf{e}_\rho \quad (3.15)$$

gives the velocity and the acceleration

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= l\dot{\mathbf{e}}_\rho = l\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi \\ \ddot{\mathbf{r}} &= l\ddot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi + l\dot{\varphi}\dot{\mathbf{e}}_\varphi = l\ddot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi - l\dot{\varphi}^2\mathbf{e}_\rho \end{aligned}$$

as a linear combination of the basis vectors

$$\mathbf{e}_\rho = \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_\varphi = \begin{bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

These results can also be drawn from formulas (2.42) and (2.46). The forces $m\mathbf{g}$ and \mathbf{T} projected on the basis vectors $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi$ allow to write the equation

$$m(-l\dot{\varphi}^2\mathbf{e}_\rho + l\ddot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi) = (m\mathbf{g} \cdot \mathbf{e}_\rho)\mathbf{e}_\rho + (m\mathbf{g} \cdot \mathbf{e}_\varphi)\mathbf{e}_\varphi + (\mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_\rho)\mathbf{e}_\rho.$$

The computation of the scalar products and the rearrangement of the terms give a null linear combination

$$[-ml\dot{\varphi}^2 - mg \cos \varphi + T]\mathbf{e}_\rho + [ml\ddot{\varphi} + mg \sin \varphi]\mathbf{e}_\varphi = 0.$$

Thus, the linear independence of the basis vectors provides the two differential equations

$$-ml\dot{\varphi}^2 = mg \cos \varphi - T \quad (3.17)$$

$$ml\ddot{\varphi} = -mg \sin \varphi. \quad (3.18)$$

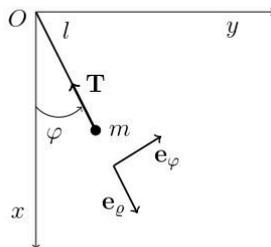


Figure 3.2: Plane pendulum

For an observer at rest, the first one shows that the mass times the normal acceleration (2.47) is equal to the tension force⁸ of the rod minus the radial component of the gravity. If $\varphi(t)$ is known, Eq. (3.17) determines T . The motion $\varphi(t)$ is provided by the second equation

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0 \quad (3.19)$$

which is a **nonlinear**⁹ differential equation. The general solution can be determined as elliptic integral, a calculation we do not want to perform here (see problems). The special case of small oscillations $\varphi \ll 1$ allows for the approximation $\sin \varphi \approx \varphi$ that leads to the linear differential equation

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0 \quad (3.20)$$

where $\omega_0^2 = g/l$. If two linearly independent solutions $\varphi_1(t)$ and $\varphi_2(t)$ exist, it is possible to write the two equations

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 + \omega_0^2 \varphi_1 &= 0 \\ \ddot{\varphi}_2 + \omega_0^2 \varphi_2 &= 0. \end{aligned}$$

The multiplication of the first by a_1 , the second by a_2 , and the addition of both of them yields the equation

$$\frac{d^2}{dt^2}(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2) + \omega_0^2(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2) = 0$$

that supplies the solution of Eq. (3.20) as a linear combination

$$\varphi(t) = a_1\varphi_1(t) + a_2\varphi_2(t). \quad (3.21)$$

This result makes sense insofar as the two functions are linearly independent. They must be found. It turns out that $\sin \omega_0 t$ and $\cos \omega_0 t$ satisfy Eq. (3.20), are linearly independent, and therefore provide the general solution

$$\varphi(t) = a_1 \sin \omega_0 t + a_2 \cos \omega_0 t \quad (3.22)$$

where the constants a_1 and a_2 are determined by the initial conditions. There can exist only two independent solutions, since only two initial conditions are available for determining the coefficients a_1 and a_2 . It also follows that the two independent solutions of the homogeneous equation form a 2-dimensional linear space. Instead of the constants a_1 and a_2 , it is usual to introduce an **amplitude** C and a **phase** χ by the relations

$$\begin{aligned} a_1 &= C \cos \chi \\ a_2 &= C \sin \chi \end{aligned} \quad (3.23)$$

with their inverse

$$\begin{aligned} C^2 &= a_1^2 + a_2^2 \\ \tan \chi &= a_2/a_1. \end{aligned}$$

By means of the trigonometric identity $\sin(\omega_0 t + \chi) = \sin \omega_0 t \cos \chi + \cos \omega_0 t \sin \chi$, we finally obtain the well-known function describing the motion of an harmonic oscillator

$$\varphi(t) = C \sin(\omega_0 t + \chi). \quad (3.24)$$

⁸For the observer moving with m , there exists a centrifugal force $m\omega^2 = mv^2/l$ and the gravity force in equilibrium with the tension called centripetal force.

⁹The differential equation is nonlinear since the function $\varphi(t)$ appears in $\sin \varphi$.

3.1.3 Taylor series (Mathematical complement)

Imagine we have two functions $f(x)$ and $g(x)$. We are interested in their behavior in the neighborhood of the origin $x = 0$. Somehow we can not explore this neighborhood but we can have detailed information about all the derivatives of both functions. In this section we assume that both functions $f(x)$ and $g(x)$ are infinitely derivable, which is a quite common case for the functions encountered in physics.

Statement: If all derivatives of the functions $f(x)$ and $g(x)$ at $x = 0$ are the same, then the functions are the same.

Let's consider now a generic function $f(x)$ and a polynomial (of infinite degree!) $g(x)$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (3.25)$$

The n -th derivative of $g(x)$ is

$$\left. \frac{d^n g(x)}{dx^n} \right|_{x=0} = n! a_n \quad (3.26)$$

Hence, if we want to write the function $f(x)$ as a polynomial (inf. degree), the coefficients of the polynomial must be such that all derivatives are the same, this is to say

$$\frac{d^n f(x=0)}{dx^n} = \frac{d^n g(x=0)}{dx^n} = n! a_n \quad (3.27)$$

or

$$a_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n f(x=0)}{dx^n} \equiv \frac{1}{n!} f^{(n)} \Big|_{x=0} \quad (3.28)$$

We can write the function $f(x)$ as

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{f^{(n)} \Big|_{x=0}}{n!} \right) x^n, \quad (3.29)$$

notice that $f^{(0)}$ is, by definition, the function itself without taking derivative. $f^{(1)}$ denotes the first derivative, etc. Also, $0! \equiv 1$ by definition.

Equation (3.29) is known as the Taylor series (or expansion) of the function $f(x)$ about the point $x = 0$. If we know the derivatives at a point $x = x_0$, the Taylor series about the point $x = x_0$ is written as

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{f^{(n)} \Big|_{x=x_0}}{n!} \right) (x - x_0)^n \quad (3.30)$$

Taylor series for the exponential function.

We consider the exponential function $f(x) = e^x$. It is well known that $f'(x) = e^x$, so all derivatives of the exponential function are the same exponential function. Since $e^0 = 1$, it is obvious that the Taylor series expansion of the exponential function is

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \dots \quad (3.31)$$

Taylor series for the $\sin(x)$ and $\cos(x)$ functions.

In the case of $f(x) = \sin(x)$ we have

$$\sin'(x) = \cos(x) \quad (3.32)$$

$$\sin''(x) = \cos'(x) = -\sin(x) \quad (3.33)$$

from which we can calculate all derivatives. We recall here that the previous derivatives are valid only if the argument x is expressed in radians. If we evaluate at zero

$$\frac{d^n \sin(x=0)}{dx^n} = \begin{cases} 0 & \text{if } n = \text{even} \\ (-1)^n & \text{if } n = 2m + 1 \end{cases} \quad (3.34)$$

So

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} (-1)^n x^{(2n+1)} \quad (3.35)$$

In the case of the $\sin(x)$ function this series converges for any value of x (of course we have to add all terms up to infinity!). However, it is pretty common to study the behavior when the argument x is small, i.e. $x \ll 1$. Since this assumption implies that $x \gg x^2 \gg x^3 \dots$, we can approximate the $\sin(x)$ function only by its first term in Taylor series. We say that

$$\sin(x) \simeq x \text{ "at first order"}, \quad (3.36)$$

in figure 3.3 we show the different approximations up to terms proportional to x^7 .

In an analogous way,

$$\frac{\cos(x=0)}{dx^n} = \begin{cases} 0 & \text{if } n = \text{odd} \\ (-1)^m & \text{if } n = 2m \end{cases} \quad (3.37)$$

from which we obtain

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots \quad (3.38)$$

we say that the "lowest order correction" to the cosine function is given by

$$\cos(x) \simeq 1 - \frac{1}{2}x^2 \quad (3.39)$$

since this approximation expresses the first correction to $\cos(x) \simeq 1$.

Taylor series for the $1/(1-x)$ function.

We can deduce (homework!) that the Taylor series of the function $1/(1-x)$ about $x=0$ is given by

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots \quad (3.40)$$

If we choose different values of x it is pretty clear that, in this case, the Taylor series will not work if $|x| \geq 1$. For instance, if we choose $x = 0.1$, $1/(1-x) = 1/0.9 = 1.1111\dots$, and the Taylor series gives

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} 0.1^n = 1 + 0.1 + 0.01 + 0.001 + 0.0001 \dots = 1.1111\dots \quad (3.41)$$

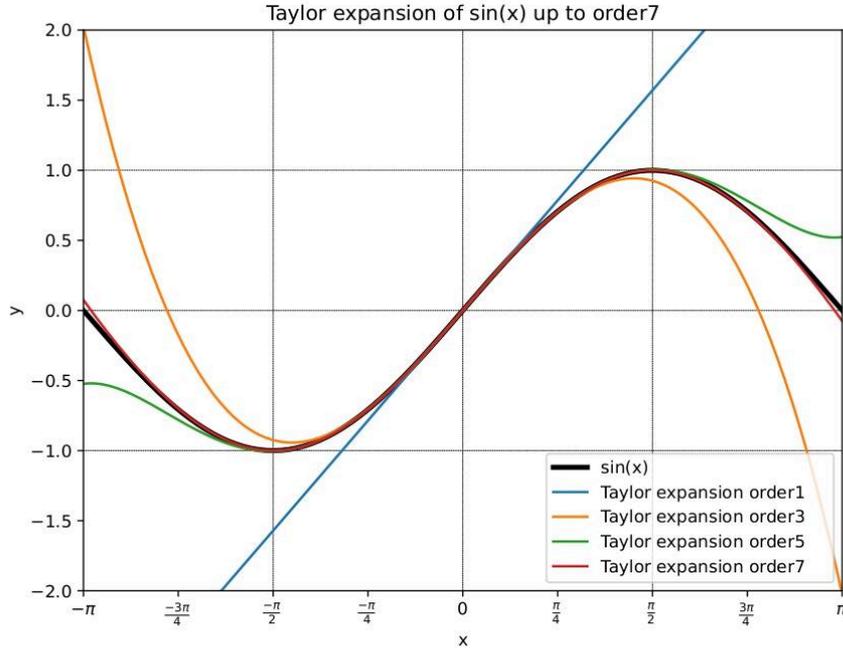


Figure 3.3: Taylor series of the $\sin(x)$ function up to 7th degree.

Which is the exact result.

However, if we take $x = 1.1$, $1/(1-x) = 1/(1-1.1) = -1/0.1 = -10$, but the Taylor series is

$$\frac{1}{1-1.1} = \sum_{n=0}^{\infty} 1.1^n = 1 + 1.1 + 1.1^2 + 1.1^3 + \dots \quad (3.42)$$

which obviously does not converge to a finite value but rather diverges towards infinity. Taylor series have what is called a “radius of convergence” within which the series is converging to a finite value and after which the series does not converge. As stated above, the radius of convergence in this last example is one, while the radius of convergence in the previous examples is infinity, i.e. the Taylor series converges to the actual value of the function for any argument.

Most of the times the equations we need to solve in physics have no known analytic solution (expressible in terms of known, standard, functions). Quite often we can provide with a reasonable approximation to a solution by using Taylor expansions that leads to analytic solutions that we can examine and obtain the phenomenology of our physical model, i.e. make predictions that may eventually be compared with the results of experiments. For instance, a form of “Taylor series on steroids” leads to many of the known results in particle physics.

3.1.4 Bead Sliding along a Rotating Rod

In a weightless environment, a bead of mass m slides without friction along a rod rotating with constant angular velocity ω . With respect to the terrestrial reference frame, the equation of motion reads

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{R} \quad (3.43)$$

where \mathbf{R} is the contact force (of unknown form!) with the rod. As shown in FIG. 3.4, the motion is described by the variables ϱ , φ . The acceleration (2.46) in polar coordinates allows to express Eq. (3.43) as follows

$$m(\ddot{\varrho} - \varrho\dot{\varphi}^2)\mathbf{e}_\varrho + m(2\dot{\varrho}\dot{\varphi} + \varrho\ddot{\varphi})\mathbf{e}_\varphi = R\mathbf{e}_\varphi .$$

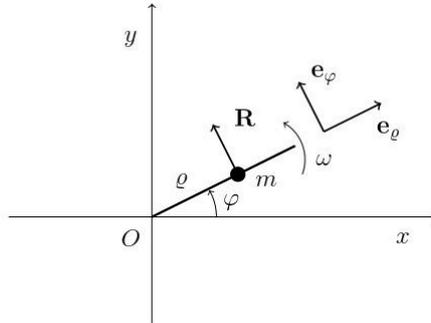


Figure 3.4: Bead sliding along a rotating rod with constant angular velocity ω

With the given constant angular velocity $\dot{\varphi} = \omega$ and by using the linear independence of the basis vectors \mathbf{e}_ϱ , \mathbf{e}_φ , we obtain the two equations¹⁰

$$\ddot{\varrho} - \omega^2\varrho = 0 \quad (3.44)$$

$$2m\omega\dot{\varrho} = R . \quad (3.45)$$

The solution of the homogeneous equation (3.44) is determined in the same way as above. We guess the two independent solutions $\exp[\omega t]$ and $\exp[-\omega t]$ that provide, by linear combination, the general solution

$$\varrho(t) = a_1 e^{\omega t} + a_2 e^{-\omega t} . \quad (3.46)$$

Finally, the application of the initial conditions $\varrho(0) = \varrho_0$, $\dot{\varrho}(0) = 0$ leads to the unique trajectory

$$\varrho(t) = \frac{\varrho_0}{2} (e^{\omega t} + e^{-\omega t}) = \varrho_0 \cosh \omega t \quad (3.47)$$

describing an exponential spiral. The second equation (3.45) allows for determining the contact force R .

¹⁰In the rotating reference frame, the centrifugal force $m\omega^2\varrho$ balances $m\ddot{\varrho}$ and the Coriolis force $2m\omega\dot{\varrho}$ balances the contact force R .

3.2 Linear Differential Equations (Mathematical complement)

The above-discussed examples of differential equations have been solved more or less easily thanks to the linearity. The purpose of this section is to summarize in two theorems the results issued from these previous examples.

Th. 1 Consider the first order inhomogeneous linear differential equation

$$\dot{x} + \alpha x = f(t) \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (3.48)$$

together with the initial condition $x(t_0) = x_0$.

1. The solution of the homogeneous equation $\dot{x} + \alpha x = 0$ is given by the exponential function

$$x_{\text{hom}}(t) = a e^{-\alpha t} .$$

2. The solution of Eq. (3.48) is given by the sum of $x_{\text{hom}}(t)$ and of a particular solution $x_{\text{part}}(t)$ of Eq. (3.48)

$$x(t) = a e^{-\alpha t} + x_{\text{part}}(t) . \quad (3.49)$$

The constant a is fixed by the initial condition.

3. The solution (3.49) is unique.

Th. 2 Consider the second order inhomogeneous linear differential equation

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \beta x = f(t) \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (3.50)$$

together with the initial conditions $x(t_0) = x_0$ and $\dot{x}(t_0) = v_0$.

1. The solution of the homogeneous equation $\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \beta x = 0$ is given by the linear combination of two independent solutions

$$x_{\text{hom}}(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) .$$

2. The solution of Eq. (3.50) is given by the sum of $x_{\text{hom}}(t)$ and of a particular solution $x_{\text{part}}(t)$ of Eq. (3.50)

$$x(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) + x_{\text{part}}(t) . \quad (3.51)$$

The constants a_1 and a_2 are fixed by the initial conditions.

3. The solution (3.51) is unique.

The various examples treated in section 3.1 show that the independent solutions of the homogeneous linear differential equations have a general exponential form

$$x(t) = e^{\lambda t} \quad \lambda \in \mathbb{C} \quad (3.52)$$

where \mathbb{C} is the field of **complex numbers**¹¹. In what follows this exponential function will be used as an **Ansatz** *i.e.* as a trial solution whose substitution into the differential equation allows for determining λ . For real λ , the function is given by an exponential. For imaginary λ it is given by sine and cosine functions whose relation with the exponential function is provided by the **Euler formula**

$$e^{\pm i\alpha t} = \cos \alpha t \pm i \sin \alpha t \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (3.53)$$

This formula can be verified by a limited Taylor expansion¹². Th.1 and Th.2 allow to write directly the solutions of all first or second order linear differential equations. In the next section, Th.2 will be applied to the one-dimensional harmonic oscillator.

3.3 One-dimensional Harmonic Oscillator

The harmonic oscillator is a nice example of second order linear differential equation. In this section, Th.2 will be used in order to determine the motion of this one-dimensional harmonic oscillator subject to a damping force and also to an external force.

3.3.1 Damped Oscillator

The 1-dimensional motion of a point mass m subject to a spring force $F = -kx$ and to a viscous friction force $F_f = -\beta\dot{x}$ is described by the Newton's equation

$$m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x} \quad (3.54)$$

where k is the spring constant and β the coefficient of the viscous force. With the notations $\omega_0^2 = k/m$ and $\gamma = \beta/m$, we arrive at the second order homogeneous linear differential equation

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (3.55)$$

¹¹The algebraic description of a complex number $z \in \mathbb{C}$ is given by the definitions :

$$z = x + iy \quad x, y \in \mathbb{R} \quad i^2 = -1.$$

The number x is called the real part of z , the number y the imaginary part, and the quantity $i = \sqrt{-1}$ the unit imaginary number. We define the complex conjugate $z^* = x - iy$ and the modulus $|z|^2 = zz^* = x^2 + y^2$. Moreover, by setting $x = |z| \cos \varphi$, $y = |z| \sin \varphi$ and by using the Euler formula (3.53), any complex number can be written as

$$z = |z|e^{i\varphi}$$

where the phase φ is given by $\tan \varphi = y/x$. We also remark that $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$.

¹²A limited Taylor expansion

$$f(\epsilon) = f(0) + \frac{1}{1!}f'(0)\epsilon + \frac{1}{2!}f''(0)\epsilon^2 + \frac{1}{3!}f'''(0)\epsilon^3 + \dots$$

of both members of Eq. (3.53) gives the same right members

$$\begin{aligned} e^{\pm i\alpha t} &= 1 + (\pm i\alpha t) + (\pm i\alpha t)^2/2! + (\pm i\alpha t)^3/3! + \dots \\ &= 1 - (\alpha t)^2/2! \dots \pm i (\alpha t - (\alpha t)^3/3! + \dots) \\ \cos \alpha t \pm i \sin \alpha t &= [1 - (\alpha t)^2/2! \dots] \pm i [\alpha t - (\alpha t)^3/3! + \dots]. \end{aligned}$$

Th.2 of Sec. 3.2 ensures that the general solution is given by the linear combination of two linear independent solutions that can be found by the Ansatz

$$x(t) = e^{\lambda t}, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (3.56)$$

Introduced into Eq. (3.55), this Ansatz provides the **characteristic equation**

$$\lambda^2 + \gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$$

that yields the two values

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\gamma^2/4 - \omega_0^2}. \quad (3.57)$$

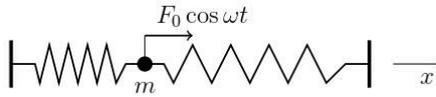


Figure 3.5: Forced harmonic oscillator

The solution of the homogeneous equation (3.55) is thus given by the set

$$\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}\} \quad (3.58)$$

that spans the linear space of solutions and yields, by linear combination, the general solution

$$x(t) = a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (3.59)$$

Depending on the sign of the discriminant $\Delta = \gamma^2/4 - \omega_0^2$, the two independent functions (3.58) can be complex. But, since the function describing the motion is real, the coefficients of the linear combination must be complex. The motion $x(t)$ depends on the values of the parameters γ and ω_0 appearing in the discriminant. For a fixed eigenfrequency ω_0 , the possible values of the friction coefficient $\gamma = \beta/m$ lead to the following classification :

underdamping : $\gamma/2 < \omega_0$

critical damping : $\gamma/2 = \omega_0$

overdamping : $\gamma/2 > \omega_0$

Underdamping : $\gamma/2 < \omega_0$ ($\Delta < 0$)

The definition of the positive quantity

$$\Omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2/4 > 0$$

and of the unit imaginary number $i = \sqrt{-1}$ allow to write the values (3.57) of lambda as

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{-(\omega_0^2 - \gamma^2/4)} \\ &= -\frac{\gamma}{2} \pm i\Omega. \end{aligned}$$

Then, the linear combination (3.59) becomes

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} [a_1 e^{+i\Omega t} + a_2 e^{-i\Omega t}] \quad a_1, a_2 \in \mathbb{C}.$$

The application of Euler's formula (3.53) leads to the solution

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\frac{\gamma}{2}t} [a_1(\cos \Omega t + i \sin \Omega t) + a_2(\cos \Omega t - i \sin \Omega t)] \\ &= e^{-\frac{\gamma}{2}t} [A \cos \Omega t + B \sin \Omega t] \end{aligned} \quad (3.60)$$

where the constants $A = a_1 + a_2$ and $B = i(a_1 - a_2)$ must be real. They are determined by the initial conditions $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$ and provide, by inversion, the complex numbers

$$a_1 = (A - iB)/2 \quad a_2 = (A + iB)/2.$$

As we have already seen in Eqs. (3.23), with the two new constants $A = C \sin \varphi$, $B = C \cos \varphi$, the solution (3.60) can be written in terms of amplitude C and phase φ

$$x(t) = C e^{-\frac{\gamma}{2}t} \sin(\Omega t + \varphi). \quad (3.61)$$

This oscillating solution is depicted in FIG. 3.6 for $C = 1$ and $\varphi = 0$.

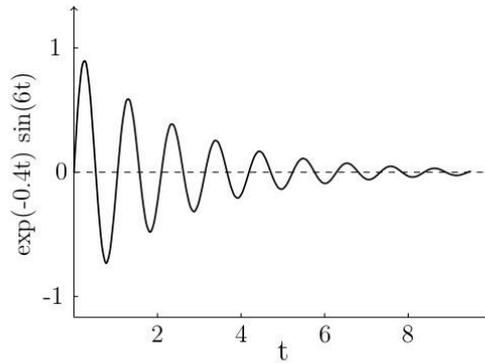


Figure 3.6: Motion of an underdamped harmonic oscillator

Critical damping : $\gamma/2 = \omega_0$ ($\Delta = 0$)

In this case, where $\lambda_1 = \lambda_2 = -\gamma/2$, only one solution remains and the differential equation (3.55) takes the form

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \frac{\gamma^2}{4} x = 0. \quad (3.62)$$

Besides the solution

$$x_1(t) = e^{-(\gamma/2)t}$$

of Eq. (3.62), another one must be found. It is easy to verify (homework) that the second independent solution is given by the function (be ingenious!)

$$x_2(t) = t e^{-(\gamma/2)t}. \quad (3.63)$$

Then, the general solution of (3.62) is provided by the linear combination

$$x(t) = [a_1 + a_2 t] e^{-\frac{\gamma}{2}t} \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R}.$$

The initial conditions $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = 0$ determine the integration constants and yield the unique solution

$$x(t) = x_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t} \left[1 + \frac{\gamma}{2}t \right]. \quad (3.64)$$

This exponentially decreasing function describes the **critical behavior** of the oscillator as illustrated in FIG. 3.7.

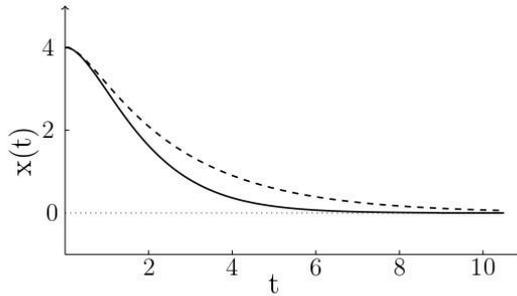


Figure 3.7: Evolution of the elongation $x(t)$ of a damped spring in critical regime (solid line) $\omega_0 = 1 = \gamma/2$ and in aperiodic regime (dashed line) $\omega_0 = 1, \gamma/2 = 1.4$

Overdamping : $\gamma/2 > \omega_0$ ($\Delta > 0$)

In this case, the values (3.57) of $\lambda_{1,2}$ are real

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\gamma^2/4 - \omega_0^2}$$

and the solution is given by a linear combination of exponential functions

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} [a_1 e^{\alpha t} + a_2 e^{-\alpha t}] \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R}$$

where we have defined $\alpha = \sqrt{\gamma^2/4 - \omega_0^2}$. The initial conditions $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = 0$ yield a unique solution

$$x(t) = \frac{x_0}{2} e^{-\frac{\gamma}{2}t} \left[\left(1 + \frac{\gamma}{2\alpha}\right) e^{\alpha t} + \left(1 - \frac{\gamma}{2\alpha}\right) e^{-\alpha t} \right]. \quad (3.65)$$

This solution corresponds to the **aperiodic regime** where, surprisingly enough, the mass m reaches its equilibrium position in a longer time than in the critical regime. This behavior is shown by the dashed line of FIG. 3.7.

3.3.2 Forced Oscillator

The motion of a damped harmonic oscillator can be maintained by an external force of frequency ω as for example

$$F(t) = F_0 \cos \omega t \quad (3.66)$$

where F_0 is a given real constant. We must then consider the inhomogeneous differential equation

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t. \quad (3.67)$$

From Th.2 of Sec. 3.2, we know that the sum of the solution of the homogeneous equation and of a particular solution of the inhomogeneous equation provides the general solution

$$x(t) = a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{\lambda_2 t} + x_{part}(t).$$

For the particular solution $x_{part}(t)$, we can try the Ansatz given by the function

$$x_{part}(t) = X_0 \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (3.68)$$

This attempt is appropriate since it contains the two constants X_0 and φ_0 needed to fulfill the second order differential equation. These two constants are determined by substituting $x_{part}(t)$ into Eq. (3.67). The calculation can be done (homework) by first using the trigonometric identity

$$\cos \omega t = \cos(\omega t + \varphi_0 - \varphi_0) = \cos(\omega t + \varphi_0) \cos \varphi_0 + \sin(\omega t + \varphi_0) \sin \varphi_0$$

and then by applying the condition of linear independence of the functions $\cos(\omega t + \varphi_0)$, $\sin(\omega t + \varphi_0)$. We obtain the amplitude and the phase

$$X_0 = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}} \quad \tan \varphi_0 = -\frac{\gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (3.69)$$

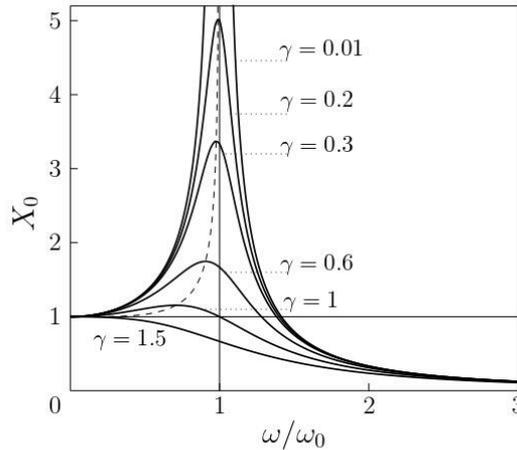


Figure 3.8: Amplitudes X_0 , eigenfrequency ω_0 , and damping factor γ

The most interesting case is given by the underdamped ($\gamma/2 < \omega_0$) forced harmonic oscillator. By combining the solution (3.61) of the homogeneous equation and the particular solution (3.68), we get the general solution

$$x(t) = C e^{-\frac{\gamma}{2}t} \sin(\Omega t + \varphi) + X_0 \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (3.70)$$

where $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}$. The constants C and φ are fixed by the initial conditions $x(0) = x_0$ and $\dot{x}(0) = v_0$. The first term of (3.70) represents the **transient regime**. It becomes,

because of the exponential factor, quickly negligible for large t . The second term is oscillating and corresponds to the **permanent regime** or forced regime. It becomes predominant for a long enough time interval and merits more detailed analysis. The condition

$$\frac{dX_0}{d\omega} = 0 \quad (3.71)$$

provides the maximum amplitude at the frequency point

$$\omega_{max} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{2}} \quad (3.72)$$

with the value

$$X_{0max} = \frac{F_0/m}{\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}}. \quad (3.73)$$

The ω -dependent amplitude $X_0(\omega)$ is illustrated in FIG. 3.8 for various γ values. The dramatic increase in amplitude X_0 (3.69) with respect to the frequency ω is called **resonance**. Its **resonance width** is measured by the damping parameter γ . The value of the maximum is large for small damping γ and even infinite for $\gamma \rightarrow 0$. It becomes blurry when γ increases. Formula (3.72) also shows that, for increasing γ , the location of the maximum shifts to the left. This well-known resonance phenomenon constitutes a very important effect encountered in many domains of physics and very often, only the particular solution (3.68) of the forced harmonic oscillator is considered, without even referring to the transitional regime.

3.3.3 Complex numbers (Mathematical complement)

We are used to work with real numbers. The results of any measurement performed with an instrument will be a real number, typically in the form of a distance, time, frequency, voltage, electric current, etc. It is however of great importance, both practical and conceptual, to extend the set of real numbers to what we call complex numbers. This can be done pretty much in analogy to the extensions of rational numbers to real numbers.

Let us suppose we have the equation $x^2 - 4 = 0$. The solutions of this equation are $x = 2$ and $x = -2$. If we consider now a very similar equation, $x^2 - 2 = 0$, we obtain solutions $x = \sqrt{2}$ and $x = -\sqrt{2}$. The number $\sqrt{2}$ is irrational, e.e. it can not be expressed as a rational one of the form $\sqrt{2} = A/B$ with A and B integers. This very consideration leads to the extension of rational numbers to irrational ones that, it turns out, defines the set of real numbers.

Let us consider the trivial equation $x^2 - 1 = 0$ with solutions $x = \pm 1$. An apparently innocent modification of the last equation comes just by flipping one sign:

$$x^2 + 1 = 0, \quad (3.74)$$

this equation apparently has no solution since any real number squared gives a positive real number, hence there is no real number x such that $x^2 = -1$. Complex numbers arise by defining a solution of the previous equation, formally it is

$$x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1} \equiv \pm i \quad (3.75)$$

Where we have defined the number i to be such that

$$i^2 \equiv -1 \quad (3.76)$$

and, of course, $(-i)^2 = (-1)^2 \cdot (i)^2 = 1 \cdot (-1) = -1$.

The number i is called “imaginary unit” (sometimes, in particular engineers, the imaginary unit is denoted by j instead of by i) and any complex number z can be written in the form

$$z = \alpha + \beta i \quad (3.77)$$

with $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. It is said that the real part of z is α , and the imaginary part of z is β : $\operatorname{Re}(z) = \alpha$, $\operatorname{Im}(z) = \beta$. We can write the complex number z as $z = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) i$

So now we are equipped with a set of numbers, the complex numbers \mathbb{C} , defined in such a way that any second degree algebraic equation has a solution. The equation $ax^2 + bx + c = 0$ with $a, c, b \in \mathbb{R}$ has a pair of solutions (always two!) given by the formula

$$x = \frac{1}{2a} \left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} \right) \quad (3.78)$$

if $b^2 - 4ac > 0$ both solutions are real, however, if the radicand is negative, $b^2 - 4ac < 0$, we can still calculate the square root using complex numbers: $\sqrt{b^2 - 4ac} = i\sqrt{|b^2 - 4ac|} \equiv i\beta$, so the solutions to the second degree equation will be

$$x = \alpha \pm \beta i \quad (3.79)$$

Incidentally, if $b^2 - 4ac = 0$, the second degree equation still has two solutions which are identical (it is also said that the solutions are “degenerate”).

Complex conjugate

The complex conjugate of a number $z = \alpha + \beta i$, denoted by \bar{z} or z^* is defined as $\bar{z} = z^* \equiv \alpha - \beta i$, i.e. the flip the sign of the imaginary part. We can see that, if z is a complex solution of a second degree algebraic equation, then \bar{z} is also a solution of the same equation. It is said that these solutions come in complex conjugate pairs.

Arithmetic of complex numbers

Suppose we have two complex numbers $z_1 = \alpha_1 + \beta_1 i$ and $z_2 = \alpha_2 + \beta_2 i$. The **sum** is defined as

$$z_1 + z_2 = (\alpha_1 + \beta_1 i) + (\alpha_2 + \beta_2 i) = (\alpha_1 + \alpha_2) + (\beta_1 + \beta_2) i \quad (3.80)$$

The **product** of the two complex numbers has to be calculated multiplying each part (real and imaginary) separately:

$$z_1 \cdot z_2 = (\alpha_1 + \beta_1 i) \cdot (\alpha_2 + \beta_2 i) = \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \beta_2 i + \beta_1 i \alpha_2 + \beta_1 i \beta_2 i \quad (3.81)$$

we admit that the multiplication by the imaginary unit is commutative, i.e. $\beta i = i \beta$ and associative, i.e. $i \beta_1 + i \beta_2 = i (\beta_1 + \beta_2)$. Hence we can group terms

$$\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \beta_2 i + \beta_1 i \alpha_2 + \beta_1 i \beta_2 i = \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 i^2 + (\alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \alpha_2) i \quad (3.82)$$

and, since $i^2 = -1$, $\beta_1 \beta_2 i^2 = -\beta_1 \beta_2$. So we finally arrive at

$$z_1 \cdot z_2 = (\alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \beta_2) + (\alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \alpha_2) i \quad (3.83)$$

Through the product of a complex number by its own complex conjugate, we can define the **norm (or modulus) of a complex number** $z = \alpha + \beta i$, denoted by $|z|$ by

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \quad (3.84)$$

For the **division** of complex numbers, we note that, if $z \neq 0 + 0i$ then $z/z = 1$ is a proper definition of the complex number $1/z$. To explicitly calculate the division of two complex numbers z_1 and z_2 , i.e. z_1/z_2 , we multiply and divide by \bar{z}_2 and expand the products:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} = \frac{1}{|z_2|^2} (z_1 \cdot \bar{z}_2) = \frac{(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2) + (\beta_1\alpha_2 - \alpha_1\beta_2) i}{\alpha_2^2 + \beta_2^2} \\ &= \frac{(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2)}{\alpha_2^2 + \beta_2^2} + \frac{(\beta_1\alpha_2 - \alpha_1\beta_2)}{\alpha_2^2 + \beta_2^2} i \end{aligned} \quad (3.85)$$

Complex variable functions

It is quite nature to think about functions $f(z)$ taking a complex argument $z \in \mathbb{C}$ resulting in another complex number $f(z) \in \mathbb{C}$. There is a whole branch of mathematics called (among other names) “complex analysis” where the concept of derivative, generalizations of Taylor series, integrals, etc is developed. Many applications of the results of complex analysis are found in many branches of science since there are extremely powerful theorems that help us to solve problems and understand concepts that would be otherwise impossible to grasp. It is hence almost compulsory to have a decent expertise in complex variable. A great deal of this is typically acquired in a course “analysis III” or the like and, of course, in any subject called “Mathematical methods for physics”.

Since we know how to multiply complex numbers, it is trivial to define integer powers and hence polynomials of complex numbers. A function such as

$$f(z) = a + bz + cz^2 + dz^3 + \dots \quad (3.86)$$

is defined in the obvious way.

Perhaps some of the most utilized functions of complex variable in physics are trigonometric, exponential and natural logarithm, whose extension to complex variable is possible. In the case of the harmonic oscillator, the use of exponential functions of complex argument is the absolute standard way to analyze the problem and obtain very general results with application in almost all branches of physics.

The Argand diagram, polar representation of complex numbers and the Euler formula.

Very often we plot real number along a line, for instance to have a visual representation of a real function $f(x)$ of real argument x , we plot the real argument along a line (the “x axis”) and the value of the function in the perpendicular direction (the “y axis”), see figure 3.9 for a sketch. Since the complex number have two components (real and imaginary), it is possible to represent any complex number $z = x + yi$ in a two dimensional diagram where the horizontal coordinate x represents the real part of z , $x = \text{Re}(z)$ and the vertical coordinate y represents the imaginary part $y = \text{Im}(z)$. This is called the Argand diagram (Argand introduced it in the early 19th century but others authors used the same idea even before),

but is more widely known as the complex plane representation of real numbers. Nowadays the complex plane and the complex numbers set mean almost exactly the same thing.

Since the Argand representation of $z = x + yi$ is just the the point in two dimensions with coordinates x and y , we can also express the very same point in polar coordinates ρ and ϕ . We know that

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix} \quad (3.87)$$

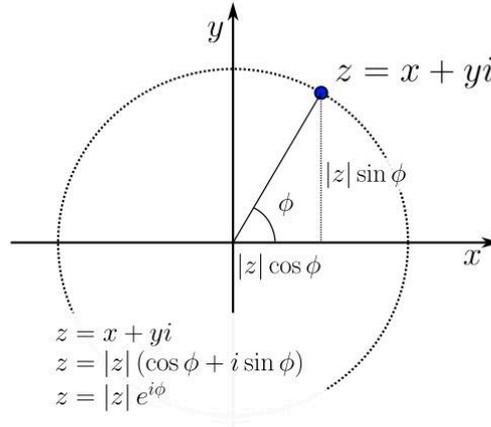


Figure 3.9: Sketch of representation of complex numbers in the complex plane.

Going from the Argand representation to the the real and imaginary parts of the imaginary number $z = x + yi$ we have

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = |z| \quad (3.88)$$

and hence z can be expressed as

$$z = |z| \cos \phi + i |z| \sin \phi = |z| (\cos \phi + i \sin \phi) \quad (3.89)$$

Furthermore, if we consider the Taylor expansions of \sin and \cos we can write

$$\cos \phi + i \sin \phi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{(2n+1)} \quad (3.90)$$

we notice that the first series in eq.(3.90) only take even indices while the second series only take odd terms. We also consider that

$$i^1 = i \quad (3.91a)$$

$$i^2 = -1 \quad (3.91b)$$

$$i^3 = -i \quad (3.91c)$$

$$i^4 = i^0 = 1 \quad (3.91d)$$

Considering equations (3.90), (3.91) and arranging even and odd terms of the series in a single one, we reach

$$\cos \phi + i \sin \phi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\phi)^n}{n!} \quad (3.92)$$

which coincides with the Taylor series for the function $e^{i\phi}$. We hence have deduced the **Euler formula**

$$e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi \quad (3.93)$$

This formula in particular can be used to deduce in a simple way many trigonometric identities not to be discussed here. From the Euler formula we can deduce, for instance, the Euler identity

$$e^{i\pi} + 1 = 0 \quad (3.94)$$

Since

$$e^{A+B} = e^A \cdot e^B \quad (3.95)$$

the exponential of a complex number $z = a + ib$ can always be written as

$$e^z = e^a \cdot e^{ib} \quad (3.96)$$

We notice that the modulus of the exponential of a purely imaginary number is 1, i.e. if $\phi \in \mathbb{R}$, then:

$$|e^{i\phi}| = 1 \quad (3.97)$$

Using equation (3.89) and (3.93), we can write any complex number as

$$z = |z| e^{i\phi} \quad (3.98)$$

A word on derivatives

Regarding derivatives with respect to real arguments of functions that are in general complex, we should just treat the imaginary unit as any number. The time-dependent function $f(t) = \exp(i\phi(t)) = \cos(\phi(t)) + i \sin(\phi(t))$ has a derivative

$$\dot{f}(t) = \frac{d}{dt} (e^{i\phi(t)}) = e^{i\phi(t)} \cdot i \cdot \dot{\phi}(t) \quad (3.99)$$

Where we have just used the chain rule applied to the argument of the exponential function which is $i\phi(t)$, we don't forget the i . We can check that this is the case by taking the explicit derivatives of the sinusoidal functions.

One almost trivial example at this point is to consider the temporal dependence of the angle ϕ as linear with time, i.e. $\phi(t) = \phi_0 + \omega t$, where ϕ_0 is a given constant and the angular frequency ω is another constant. In this case $f(t) = e^{i(\phi_0 + \omega t)}$ and its derivative

$$\dot{f}(t) = i\omega e^{i(\phi_0 + \omega t)} = i\omega \cdot f(t) \quad (3.100)$$

In a similar manner we can calculate the second derivative,

$$\ddot{f}(t) = (i\omega)^2 e^{i(\phi_0 + \omega t)} = -\omega^2 \cdot f(t)$$

and so on. We see that this property can be extremely relevant in the solution of ordinary differential equations since all derivatives are proportional to the function itself.

3.3.4 Complex Representation of the harmonic oscillator

At the end of this section devoted to the harmonic oscillator, let us show that the calculation of the amplitude X_0 and the phase φ_0 becomes easier if we use a **complex representation**¹³. However, it must be clear that complex representation for real function can be used insofar as only linear operations are carried out. By means of the Euler formula (3.53), we perform the replacement

$$\frac{F_0}{m} \cos \omega t \quad \longrightarrow \quad \frac{F_0}{m} e^{i\omega t} \quad F_0 \in \mathbb{R} \quad (3.101)$$

and look at a particular solution of the form

$$x_{part}(t) = X_0 e^{i(\omega t + \varphi_0)} \quad X_0, \varphi_0 \in \mathbb{R}. \quad (3.102)$$

This Ansatz is put into Eq. (3.67) and yields the algebraic equation

$$X_0 e^{i\varphi_0} (-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2) = \frac{F_0}{m}$$

that can be separated into real and imaginary parts in order to give the equality

$$X_0 (\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega) = \frac{F_0}{m} (\cos \varphi_0 - i \sin \varphi_0) \quad (3.103)$$

from where we determine easily the constants X_0 and φ_0 . On one hand, the calculation of the complex modulus of both members immediately provides the amplitude

$$X_0 = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}}. \quad (3.104)$$

On the other hand, the ratio of the imaginary part to the real part yields the phase

$$\tan \varphi_0 = \frac{-\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (3.105)$$

These two last results, already obtained previously in (3.69), have been recovered here with less effort thanks to the complex representation.

Numerous other physical systems, like for example *RLC* electric circuits, obey this type of second order linear differential equation. Moreover, the harmonic oscillator serves as model for many important physical applications. It is necessary to master the subject.

3.4 Some generalizations of spring-mass system

In this section we consider come generalization of the simple spring-mass system described in this chapter.

¹³See ¹¹footnote in this chapter.

3.4.1 Two spring, one mass

We consider that the mass m is attached now to two springs of elastic constants k_1 and k_2 respectively. This can be done on two obvious ways: The spring 1 is attached to the mass, then to the spring 2 which is then attached to a fixed point in **series**, or both springs are attached to the mass and the fixed point in **parallel**.

Parallel springs.

In this case, the force exerted on the mass by each spring on the mass is $F_i = -k_i x$ for $i = 1, 2$. Hence the total force, i.e. the sum is given by

$$F(x) = k_1 x + k_2 x = (k_1 + k_2) x \equiv k_{parallel} x \quad (3.106)$$

Hence the movement of a mass connected to two springs in parallel is identical to the movement of the same mass connected to a single spring whose elastic constant is the sum of the individual ones, $k_{parallel} = k_1 + k_2$. See figure 3.10a for an explanatory sketch.

Springs in series.

In this case, if Δ_1 is the elongation of the first spring, the force exerted by this first spring on the mass is $F_1 = -k_1 \Delta_1$. Analogously, the force exerted by the second spring, with elongation Δ_2 , on the first spring is given by $F_2 = -k_2 \Delta_2$. However, by the action-reaction principle this is the same force as the one exerted by the first spring on the second with opposite sign, i.e. $F_{1 \text{ on } 2} = \Delta_1 k_1$, from which we conclude that

$$\Delta_1 k_1 = \Delta_2 k_2 \quad (3.107)$$

We must consider that The total elongation $\Delta_1 + \Delta_2 = x$ is the total displacement of the mass m . From eq.(3.107) we can deduce $\Delta_2 = \Delta_1 k_1 / k_2$, and hence

$$x = \Delta_1 + \Delta_2 = \Delta_1 \left(1 + \frac{k_1}{k_2} \right) \quad (3.108)$$

or

$$\Delta_1 = x \left(1 + \frac{k_1}{k_2} \right)^{-1} \quad (3.109)$$

We conclude then that the force acting on the mass can be written as

$$F_1 = -\Delta_1 k_1 = -x k_1 \left(1 + \frac{k_1}{k_2} \right)^{-1} = -\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} x \equiv k_{series} x \quad (3.110)$$

We see that in this case, the series connections of springs leads to an equivalent problem with a single spring of effective elastic constant k_{series} given by

$$k_{series} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \quad (3.111)$$

or

$$\frac{1}{k_{series}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \quad (3.112)$$

This last two problems illustrate a very general procedure in physics: Sometimes it is possible to simplify a problem by deducing **effective parameters** that bring the mathematical description of the physical system to one whose properties are known. In the previous cases we just had to properly define an effective elastic constant k_{series} or $k_{parallel}$. See figure 3.10b for an explanatory sketch.

3.4.2 Two masses, one spring

In view of the previous considerations, it is almost unavoidable to ask ourselves about a system where two masses are attached by a spring. To keep the problem simple, we shall consider that both masses are along the x axis (so only in 1D). The position of particle 1, with mass m_1 is given by $p_1 = X_1 + x_1$, and the position of the second particle with mass m_2 is given by $p_2 = X_2 + x_2$, where X_1 and X_2 are equilibrium positions where the force of the spring is exactly zero. The spring constant is k .

The first thing we should consider is the force exerted by the spring that will be proportional to its elongation $\Delta = x_2 - x_1$ (we can assume for the discussion that $x_1 < x_2$ but it's not strictly necessary). The force acting on the particle 1 ("on the left") is hence given by

$$F_1 = -\Delta k \quad (3.113)$$

The force acting on particle 2 is the opposite:

$$F_2 = \Delta k$$

substituting the value of $\Delta = x_2 - x_1$ we obtain

$$F_1 = -k(x_2 - x_1) = m_1 \ddot{x}_1 \quad (3.114a)$$

$$F_2 = k(x_2 - x_1) = m_2 \ddot{x}_2 \quad (3.114b)$$

Now we have an, apparently, very difficult problem to solve: the equations of motion for particle 1 depend on the position of particle 2 and vice-versa. However, noticing that the force acting on particle 1 is the opposite of the force acting on particle 2, if we add the two equation we obtain

$$m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 = -k_1(x_2 - x_1) + k_1(x_2 - x_1) = 0 \quad (3.115)$$

Since the masses m_1 and m_2 are constant, we can define the position of the **center of mass** $x_c = (m_1 x_1 + m_2 x_2) / M$, with $M \equiv m_1 + m_2$, whose equation of motion is

$$M \ddot{x}_c = 0 \quad (3.116)$$

i.e. the center of mass **does not have any acceleration** (in the absence of other external forces, but only the spring connecting both particles). Dividing the equation of motion for particle 1 by its mass m_1 , and the same with the second, we get

$$\ddot{x}_1 = \frac{k}{m_1} (x_2 - x_1) \quad (3.117a)$$

$$\ddot{x}_2 = -\frac{k}{m_2} (x_2 - x_1) \quad (3.117b)$$

If we subtract now eq.(3.117a) to eq.(3.117b) we obtain

$$\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = -k \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) (x_2 - x_1)$$

The **relative coordinate** x_r of particle with respect to the position of particle 1 is $x_r = x_2 - x_1$ and, in view of the previous equation it is clear that this relative coordinate follows the equation of motion

$$\mu \ddot{x}_r = -k x_r \quad (3.118)$$

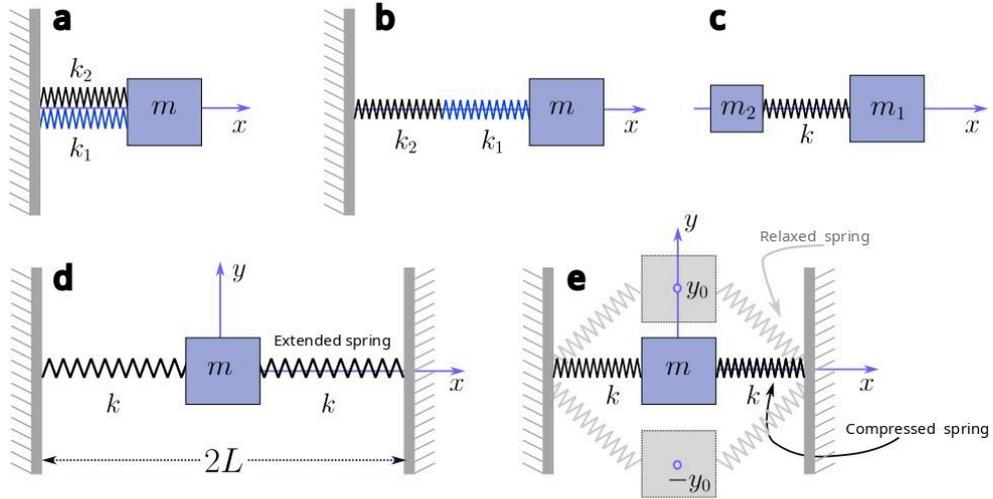


Figure 3.10: Different spring-mass systems. Two springs in parallel and one mass (a), Two springs in series and one mass (b), two masses and one spring (c), two attached springs both connected to a mass, springs are in tension (d), and the same but with springs in compression, the two possible stable equilibrium points are drawn in gray shade (e).

Where the **reduced mass** μ is defined as

$$\mu \equiv \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)^{-1} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (3.119)$$

If both particles have the exact same mass $m_1 = m_2 \equiv m$, the reduced mass will be $\mu = m/2$. Surprisingly, the string attached to two equal masses will behave in the same way as the spring attached to a fixed point and a mass only half of either. On the contrary if $m_2 \gg m_1$, the mass of object 2 is so massive that it won't move appreciably, it will behave as a fixed point. In this case the reduced mass is (consider $m_1 + m_2 \simeq m_2$)

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \simeq \frac{m_1 m_2}{m_2} = m_1$$

and, as expected, the equations of motion now corresponds to a single mass m_1 attached to the spring and a fixed point.

We have seen in this section that, when there are not external forces acting on each particle, the center of mass behaves as a particle with zero force and, more importantly, the relative position between the two particles behaves as a single particle of reduced mass. In the following chapters this concepts will be further generalized. See figure 3.10c for an explanatory sketch.

3.4.3 Equilibrium positions in two dimensions for a single mass attached two two stings and two fixed points. Spontaneous symmetry braking (advanced)

Finally, we consider only the equilibrium positions, defined by total forces=0, of a single mass attached to two equal springs of elastic constant k along the axis x , one spring at each

side of the mass and each spring attached to corresponding fixed points.

We consider a particle in two dimensions, with Cartesian coordinates x and y . Both springs have an elastic constant k and a length Δ at which they are relaxed, i.e. they exert no force. The distance between the two walls is $2L$. As we shall see below, a qualitative discussion suffices to understand the phenomenology. we have several cases:

Springs in tension, $L > \Delta$:

The elongation of the spring on the right is $\ell_1 = L - \Delta - x$ hence the force on the particle due to spring 1 is $F_1 = k\ell_1 = k(L - \Delta - x)$, analogously, the elongation of spring 2 is $\ell_2 = L - \Delta + x$, hence the force on the particle due to spring 2 is $F_2 = -k\ell_2 = k(L - \Delta + x)$. Recall spring 1 is on the right and spring 2 is on the left. The total force along x is then $F_x = F_1 + F_2 = -2kx$ so the equilibrium point in the x axis is reached at $x = 0$. On the other hand, if we move the particle to the left, the force will point to the right and vice versa, exactly as with a standard oscillator.

If we also consider movements along the y direction, it is pretty simple to understand that the force along y is negative if $y > 0$ and vice versa. Hence the point $x = 0, y = 0$ is an stable equilibrium point. The forces tend to restore the position of the particles to the origin. See figure 3.10d for an explanatory sketch.

Springs in compression, $L < \Delta$

In this case $x = 0, y = 0$ must be an equilibrium point. However this points is not stable. A small displacement along the y axis will result in forces that tend to move the particle away, even further, since the springs are in compression. The equilibrium position would be reached when both springs are relaxed, i.e. its length is l . The can only happen along the y axis ($x=0$). if $x = 0$ and $y = y_0$ is such a position, the length of each spring will be $l = \sqrt{y^2 + L^2}$. The equilibrium position is reached when $l = \Delta$, i.e. $y_0^2 + L^2 = \Delta^2$, hence $y_0 = \pm\sqrt{\Delta^2 - L^2}$ (recall $\Delta > L$), i.e, there are two positions of the particle at which the springs are both totally relaxed. Any movement around this position will result in forces trying to restore the position to the equilibrium one, hence the equilibrium position is stable. Also, since the origin is an unstable equilibrium point, any small perturbation, no matter how small it is, will destabilize the system that will evolve towards one of the equilibrium points, in realistic position, energy will be dissipated and, finally, the particle will stop at one of the equilibrium points. Since the the perturbation triggering the movement can be arbitrary, is is difficult (or impossible if the perturbation is a random thermal fluctuation) to predict at which point the particle will stop. See figure 3.10e for an explanatory sketch.

Spontaneous symmetry braking. The proposed system is totally symmetric with respect to the sign of y or the sign of x . We gave arguments suggesting that, no matter what, the particle will end up in one of the stable equilibrium points. Hence, the final geometry of the system will break the up-down symmetry despite the fact that all equations are symmetric. This effect is known as spontaneous symmetry breaking and it is found in many fields of physics ranging from thermodynamics to particle physics and cosmology.

In the next chapters we shall consider many of the properties of the dynamical systems from the perspective of symmetries that lead to conservation of quantities such as momenta and energy. These concepts, you will see, are very powerful and also help to practically solve problems that otherwise would be difficult to tackle.