

Synthèse du mémoire de Master présenté à la Faculté des lettres du l'Université de Fribourg (CH) à l'intention de la DICS

La résolution de problèmes dans l'enseignement des mathématiques au secondaire I

L'analogie est-elle une stratégie de résolution utilisée par les élèves ?

Ce travail de recherche a été effectué sous la direction du Dr Roland-Pierre Pillonel-Wirsch.

Il a été rédigé par Marielle Dobler.

Le mémoire a été déposé le 7 mars et soutenu le 24 avril 2013.

Introduction

Pour obtenir le DAES I, on demande à chaque étudiant de rédiger un mémoire. Ce travail doit consister en une recherche en lien avec la pratique de l'enseignement. Pour que cette étude ne soit pas dépourvue de sens et d'utilité, il m'a semblé logique de choisir un thème en lien direct avec mes branches : j'ai décidé de me tourner vers les mathématiques, discipline que j'affectionne tout particulièrement. J'ai ensuite parcouru tout ce qui constituait l'enseignement de cette branche : le domaine est bien vaste ! En parcourant le plan d'études, un thème a soudainement attiré mon attention, celui de la résolution de problèmes. Je me suis donc d'abord plongée dans de nombreuses lectures qui ont pu orienter ma recherche : ma curiosité s'est ainsi portée sur l'utilisation de la stratégie de résolution par analogie. Pour le côté concret du travail, faire passer des problèmes à des élèves était vite devenu une évidence : comment étudier la résolution de problèmes sans que les élèves eux-mêmes résolvent des problèmes ? Au final, j'ai eu envie de faire ressortir de tout cela quelques considérations et réflexions qui pourront améliorer directement et significativement mes pratiques au sein d'une classe.

Dans ce travail, on trouve tout un chapitre théorique servant à définir dans son sens le plus large la résolution de problèmes : nous avons parlé de ce qu'elle peut véritablement apporter aux élèves ; nous nous sommes attardés ensuite à définir ce qu'était vraiment un problème avant d'examiner dans le détail le processus de résolution. Un coup d'œil détaillé a été jeté aux stratégies de résolution, plus précisément à celle par analogie puisque c'était elle qui m'intéressait particulièrement. Un doigt a été mis finalement sur la différence filles-garçons que l'on trouve au sein de la branche. Tout ceci nous a amené à la formulation d'objectifs de recherche que nous tenterons d'atteindre dans la suite du travail. Pour ce faire, la méthodologie a été expliquée et argumentée dans ses moindres détails. Les résultats ont ensuite été présentés succinctement avant d'être analysés et discutés plus amplement. D'eux ont découlé de nombreuses considérations qui nous ont permis de répondre aux objectifs de la recherche.

Objectifs de recherche

L'élaboration du cadre théorique et les différentes lectures n'ont pu que provoquer un questionnement. D'un côté, le *Curriculum* soulignait les bienfaits de la résolution de problèmes et plaçait même cette dernière au centre de l'enseignement des mathématiques. D'un autre côté, les auteurs mettaient en évidence le fait que la pratique de cette résolution de problèmes semblait faire peur aux enseignants car elle demande un changement des idées, des mentalités.

Pour réussir un problème, la phase de représentation est cruciale. Pourtant, les non-experts en résolution de problèmes passent souvent très peu de temps à définir clairement l'espace du problème car ils préfèrent se lancer dans la recherche de solutions ; ceci peut évidemment les amener vers des chemins erronés. Le *Curriculum* insiste sur l'identification du but et le triage des informations pertinentes ou non et ce dès l'entrée à l'école secondaire. On pouvait donc se dire que les élèves étaient entraînés à reconnaître ces éléments et pouvaient se concentrer sur les stratégies à utiliser. Mais

est-ce vraiment le cas ? Il a été alors bon d'examiner les liens qui existaient entre la représentation d'un problème et la solution trouvée.

Je me suis intéressée tout particulièrement à la stratégie de résolution par analogie. On la retrouve mentionnée dans le *Curriculum* ; ce document donne le choix aux enseignants de nommer ou non la stratégie. Toujours est-il que cette stratégie est censée être enseignée et développée en classe. La littérature semble cependant avancer que très souvent, les élèves sont placés dans des situations où l'on attend d'eux un recours spontané à l'analogie et que cela est une tâche bien difficile pour eux. On était donc en droit de se demander si les élèves possédaient vraiment cette stratégie dans leur bagage.

Finalement, les conditions d'utilisation de l'analogie m'ont interpellée. Souvent, en classe, pour aider un élève qui bloque sur un énoncé, la phrase « essaie de te souvenir d'un problème semblable » est utilisée, sans plus de précisions. Un peu dans cette idée, il a semblé intéressant de présenter aux élèves deux problèmes isomorphes, sans d'autres explications, afin de voir si l'un devenait problème source et donc référence pour la résolution de l'autre. Ainsi, le processus analogique dans un cas un peu plus complexe a pu être observé.

La réflexion et le questionnement présentés ci-dessus ont permis de formuler des objectifs de recherche plus précis :

- Est-ce qu'une représentation claire et complète d'un problème signifie forcément que la solution sera correcte ?
- Les élèves de deuxième année du Cycle d'Orientation ont-ils en leur possession, consciemment ou non, la stratégie de résolution de problèmes par analogie ?
- En présence de problèmes isomorphes, les élèves de deuxième année du Cycle d'Orientation ont-ils recours spontanément à la stratégie de résolution de problèmes par analogie ?

Procédure méthodologique

La méthode utilisée dans cette recherche est une méthode d'enquête, puisque l'on a cherché à recueillir directement auprès des élèves des informations qui portaient sur la manière dont ils résolvaient des problèmes. Pour cela, on a proposé aux élèves de résoudre quelques problèmes qui ont été ensuite analysés au moyen d'une grille. On peut donc dire que dans un premier temps, une technique de collecte de données par test/sondage a été mise en place et s'est articulée avec l'utilisation d'un genre de questionnaire que sont les problèmes à résoudre. On est entré ensuite plutôt dans une technique de collecte par observation au moyen d'une grille vu que les problèmes ont été analysés sous toutes leurs coutures.

Plus précisément, j'ai décidé de présenter à des élèves une série de problèmes à résoudre. Pour ce faire, j'ai sélectionné des problèmes qui existaient déjà afin de les adapter pour qu'ils collent au mieux à l'environnement des élèves. Je me suis d'abord inspirée des problèmes de Luchins (1942, présenté par Costermans, 1998). J'ai proposé ensuite un deuxième problème bien connu, celui de la Tour de Hanoï à trois disques. Le problème de la Cérémonie du Thé (Kotovsky, Hayes et Simon, 1985, repris par Costermans, 1998, p. 108) a finalement servi de source d'inspiration.

Des grilles d'analyse pour chaque problème ont été créées. Elles contiennent cinq points qui ont été repris lors de l'analyse : l'identification du but, la mise en évidence des informations utiles, la structure du travail, la justesse des calculs, déplacements ou transferts et l'exactitude de la solution finale. Chaque point a été divisé en différentes actions que pourrait effectuer un élève ; ces actions ont été ensuite converties en faits directement observables dans une copie, ce qui a conduit finalement au choix d'une appréciation utilisable lors de l'analyse des résultats.

Le Cycle d'Orientation qui m'a été attribué par M. Zufferey pour effectuer le recueil des données est celui du Gibloux. J'ai reçu l'autorisation de faire passer les problèmes dans deux classes de deuxième année, section Générale, de chacune 25 élèves. J'ai donc pu collecter 50 mesures (aucun élève malade ce jour-là). Au total, il y avait 26 filles et 24 garçons. La méthode d'échantillonnage retenue est une

méthode non aléatoire de convenance : le Cycle d'Orientation qui m'a été attribué a déterminé mon échantillon.

Résultats principaux

- Est-ce qu'une représentation claire et complète d'un problème signifie forcément que la solution sera correcte ?

Identifier complètement un but et les informations importantes qui l'accompagnent n'est pas chose facile ; les élèves arrivent à le faire, mais trop souvent partiellement. On retrouve cela dans les deux groupes de problèmes utilisés. La place du contexte dans lequel s'inscrit un problème est primordiale : l'élève doit pouvoir mobiliser assez de connaissances spécifiques au domaine pour se lancer dans le processus de résolution. Les résultats montrent que toute cette question reste un point délicat. Les connaissances spécifiques plus faibles de certains élèves sont une explication, mais il existe d'autres raisons : une donnée trop compliquée, une mécompréhension des notions théoriques, une technique de tri des informations lacunaire, le graphisme différent d'un énoncé, une syntaxe défailante. L'étourderie et le manque d'application doivent aussi être mentionnés.

Il est intéressant d'avancer ce qui entrave une bonne représentation d'un problème, encore faut-il que cela soit légitime et utile ! La représentation du problème est-elle un passage obligé pour que les élèves puissent trouver une solution ? De manière générale, il semble que la réponse à cette question soit « oui », mais elle doit être nuancée car une représentation nette et précise ne paraît pas être une obligation stricte pour réussir un problème. Sur l'ensemble des items, très peu d'élèves ont pu identifier tous les renseignements utiles à une représentation complète ; pourtant le taux de réussite des problèmes n'est pas catastrophique. De plus, certains listaient des informations importantes sans noter le but et vice versa : par la suite, leur cheminement de résolution tenait la route. On remarque cependant que cette manière de faire est plus souvent utilisée par les élèves ayant quelques facilités. Dans l'autre sens, on a vu que certains élèves proposaient une représentation plus ou moins complète du problème, mais qu'ensuite, trou noir et donc page blanche. Le fait de ne pas pouvoir poursuivre alors que la situation initiale est comprise n'a probablement rien à voir avec la représentation du problème en tant que telle, mais plutôt avec le rapport à la branche mathématique : les élèves abandonnent vite car les mathématiques passent pour une discipline exigeante ; ils se disent donc qu'ils ne sont pas à la hauteur. Certains élèves ne voient pas l'importance de la phase de représentation. Plusieurs ont laissé les lignes « but » et « informations » blanches alors que la suite est complétée : on peut penser que pour eux, l'important réside dans les essais et dans la solution, plus précisément dans l'action et non dans la réflexion. Pour appuyer cela viennent s'ajouter les élèves qui inventent des informations : ils ont procédé ainsi pour adapter la situation initiale à leur cheminement ; ils se sont donc d'abord lancés dans les essais au lieu de se représenter le problème dans son ensemble. Finalement, on ne peut pas répondre de manière formelle au premier objectif de recherche : une bonne représentation du problème n'amène pas forcément une bonne solution et une bonne solution ne découle pas forcément d'une bonne représentation du problème. Par contre, pour légitimer cette phase-là et montrer son importance aux élèves, on peut avancer qu'une représentation erronée du problème entraîne généralement une solution non satisfaisante. Dans les différents énoncés, on a vu qu'un grand nombre d'erreurs de calculs ou de déplacements était dû à une mauvaise compréhension des règles, contraintes à suivre. Il en va de même pour un mauvais choix d'opérations ou un abandon dans la résolution.

- Les élèves de deuxième année du Cycle d'Orientation ont-ils en leur possession, consciemment ou non, la stratégie de résolution de problèmes par analogie ?

La première série d'exercices nous permettait de répondre à cette question : les élèves pouvaient atteindre le but par différents chemins, dont un utilisait la stratégie de résolution par analogie. Aux vues des chiffres, un tiers possède assurément cette stratégie et est en mesure de l'employer. A cela

s'ajoute les 20% qui l'ont utilisée avec un peu plus de retenue, à savoir quand la situation s'y prête vraiment ; ils possèdent donc bien l'analogie dans leurs outils, mais cette stratégie n'est pas aussi privilégiée que précédemment. Le chemin de ceux qui n'ont pas eu recours à la chaîne opératoire a été plus laborieux. Les élèves de ce groupe ne semblaient en effet pas posséder de stratégies de résolution efficaces : effectuer ces problèmes leur a donc demandé plus d'énergie et plus d'engagement. A la longue, beaucoup ont préféré baisser les bras et ne plus rien écrire. On note donc qu'une partie des élèves ne se sent pas assez sûre face à la résolution de problèmes et que cela est une cause d'abandon de la tâche à effectuer.

En définitive, même si l'analogie est une stratégie citée par le *Curriculum* et qui doit être enseignée, on remarque que dans la réalité, seule la moitié des élèves est en mesure de l'utiliser en situation.

- En présence de problèmes isomorphes, les élèves de deuxième année du Cycle d'Orientation ont-ils recours spontanément à la stratégie de résolution de problèmes par analogie ?

8% des élèves seulement ont pu proposer une solution valable pour le Rituel : dans ces 8%, on peut avancer assez certainement que 6% ont réussi à résoudre le Rituel grâce à la Tour. Le recours spontané à l'analogie en présence de problèmes isomorphes n'est donc de loin pas garanti, même si une bonne majorité a pu sans trop de mal résoudre la Tour. Par contre, le Rituel a été synonyme de catastrophe générale : la représentation a posé des difficultés, ce qui a engendré de nombreuses erreurs de transferts ou même l'abandon. Les élèves ont résolu ces deux derniers problèmes comme s'ils étaient indépendants alors que l'un était censé servir de problème-source. Les élèves de deuxième année, section Générale ne possèdent donc pas encore assez de capacités pour mettre en œuvre l'analogie dans de pareilles situations.

Conclusion

Ce travail m'a permis de mieux comprendre le processus de résolution de problèmes et de mettre en lumière certaines lacunes que rencontrent les élèves. Pour rappel, on a découvert que la représentation d'un problème, point central selon la littérature, ne revêt pas autant d'importance aux yeux des élèves. Cette constatation a une influence directe sur l'objectif de recherche suivant. On a découvert que les élèves ne possédaient de loin pas tous la stratégie de résolution par analogie dans leur bagage mathématique et ce même si elle doit être enseignée dès le début du Secondaire I. On comprend mieux cela maintenant : comme les élèves peinent à bien se représenter un énoncé, comment dégager clairement les liens de familiarité qui pourraient déclencher l'utilisation de l'analogie entre deux situations ? Sous cet angle, la tâche semble compliquée et demande encore de l'entraînement. Finalement, supposer que les élèves aient recours à l'analogie spontanée semble être actuellement une utopie : on l'a vu, en présence de problèmes isomorphes, seuls 6% ont pu s'appuyer sur cette stratégie pour résoudre un problème.

Inutile de dire que ce présent travail ne va pas révolutionner le monde de l'enseignement de la résolution de problèmes en mathématiques ; de plus, de part la méthode d'échantillonnage, il ne permet aucune généralisation. Il n'amorce aussi qu'une infime partie de la réflexion qui pourrait être menée sur les stratégies de résolution, et même seulement sur l'analogie. On peut juste dire, à part le fait que cette recherche a apporté beaucoup de pistes d'amélioration pour ma pratique personnelle, qu'elle permet d'ouvrir la réflexion sur différents points. Reprenons- en donc quelques-uns :

- Il serait peut-être bon, avant d'entraîner les différentes stratégies de résolution, d'opérer un retour en arrière et de travailler plus en profondeur la représentation de toute situation. Les élèves n'ont pas le réflexe de mettre en évidence toutes les informations pertinentes pour un énoncé. Pourquoi ne pas tenter l'introduction du schéma de représentation du problème en espérant rendre cette phase-là plus automatique ? Ultérieurement, il serait intéressant d'examiner, pourquoi pas dans un futur mémoire, si ce dernier pourrait avoir une concrète utilité auprès des élèves.

- En proposant des problèmes isomorphes, on a voulu observer si l'analogie spontanée était possible : on a constaté que non. Dans cet élan, le même procédé pourrait être repris, mais cette fois en informant les élèves des similitudes entre les situations : on pourrait alors voir si l'analogie se déclenche plus facilement ou non et ainsi tenter de légitimer la fameuse phrase « souviens-toi d'un problème semblable ».
- Dans le cadre théorique, le travail de groupe a été effleuré : il semble qu'il puisse être à l'origine de nombreux apports positifs. Une recherche pourrait donc aussi être conduite afin de mettre en évidence réellement ce que cette manière de travailler amènerait, autant pour la résolution de problèmes que pour l'estime et la confiance des élèves.

La liste des nouvelles pistes de recherche pourrait encore s'allonger davantage, mais il me semble maintenant plus pertinent de relever ce que ce mémoire m'a apporté concrètement. Je vais donc maintenant répertorier des faits et des réflexions, en étant très honnête :

- Je serai dorénavant bien plus attentive aux connaissances spécifiques des élèves. Je n'avais auparavant pas conscience que le contexte d'un énoncé pouvait mettre un élève en difficultés et ce même avant de partir vraiment dans la résolution. Je tenterai donc d'explicitier davantage les aspects qui composent un énoncé, même s'ils paraissent couler de source.
- Je l'ai découvert, l'analogie n'est pas si simple pour les élèves ; pourtant, selon les auteurs, elle peut être une stratégie très puissante en présence de problèmes mal définis. On doit donc arrêter de vouloir privilégier l'autonomie à tout prix et se laisser le temps de passer par une phase d'entraînement pendant laquelle l'enseignant rend tout concret, que ce soit les liens de familiarité ou le nom des stratégies utilisées ainsi que leur légitimité dans telle ou telle situation. Les élèves se sentiront ainsi soutenus et aidés ; ils prendront confiance et auront plus de plaisir à faire des mathématiques. Cela ne sera possible que si les moments de métacognition ont une place plus importante dans les leçons. J'essayerai donc d'amener les élèves vers cette voie plus réflexive.
- On l'a dit, la page blanche n'est plus censée exister en résolution de problèmes ; ce n'est pourtant pas le cas. Ce fait ne provient pas des capacités propres des élèves, mais plutôt du rapport qu'ils entretiennent avec les mathématiques : certains sont anxieux, d'autres défaitistes ou encore mal à l'aise. Ces sentiments peuvent disparaître si l'on instaure un climat de travail différent au sein de la classe : la collaboration peut être privilégiée, l'audace encouragée, les plus petites actions renforcées positivement, *etc.* Ce sont ces pistes-là que je vais tenter de mettre en place dans mes cours afin de voir si sur le long terme, la page blanche se fait plus discrète.

Je me sens maintenant plus à l'aise pour enseigner la résolution de problèmes vu que j'ai eu l'occasion par ce travail de décortiquer tout le processus. Je me sens prête à expérimenter différentes techniques, comme par exemple le schéma de représentation du problème. Je porterai aussi un regard nouveau sur chaque activité de résolution qui sera probablement suivie d'une analyse bien plus experte qu'auparavant.

Bibliographie

- Arsac, G., & Mante, M. (2007). *Les pratiques du problème ouvert*. Lyon : CRDP de l'académie de Lyon.
- Commission Cantonale de Mathématiques au Cycle d'Orientation (2007). *Curriculum de Mathématiques*.
- Costermans, J. (1998). *Les activités cognitives : raisonnement, décision et résolution de problèmes*. Bruxelles : De Boeck Université.
- De Vecchi, G. (2007). *Enseigner par situations-problèmes*. Paris : Delagrave.
- D'Hainaut, L. (1985). *Des fins aux objectifs : un cadre conceptuel et une méthode générale pour établir les résultats attendus d'une formation*. Bruxelles : Editions Labor.

SYNTHESE DU MEMOIRE DE MASTER

- Gineste, M.-D. (1997). *Analogie et Cognition : étude expérimentale et simulation informatique*. Paris : Presses Universitaires de France.
- Hoc, J.-M. (1987). *Psychologie cognitive de la planification*. Grenoble : Presses Universitaires de Grenoble.
- Poirier Proulx, L. (1999). *La résolution de problèmes en enseignement : cadre référentiel et outils de formation*. Bruxelles : De Boeck Université.
- Richard, J.-F. (1990). *Les activités mentales: comprendre, raisonner, trouver des solutions*. Paris : Armand Colin Editeur.
- Tardif, J. (1992). *Pour un enseignement stratégique : L'apport de la psychologie cognitive*. Montréal : Les Editions Logiques.